UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO DE ECONOMIA

TESE DE DISSERTAÇÃO
EM

AVALIAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS SOBRE TAXAS DE JURO DE LONGO PRAZO

orientada por: Prof. doutor Mário Patinha Antão

elaborada por: João Pedro Vidal Nunes

Outubro/93

NOTA PRÉVIA

O âmbito da presente tese de dissertação confina-se à dedução e descrição de modelos de avaliação aplicáveis a opções sobre títulos de dívida pública de longo prazo ou a opções sobre futuros de títulos de dívida pública de longo prazo. Obviamente que, considerando o mesmo objecto de análise, seria possível alargar o âmbito do trabalho à formulação de estratégias de especulação ou de cobertura do risco de taxa de juro através da utilização dos produtos derivados em estudo. Contudo tal não irá acontecer, não só porque a definição de tais estratégias em pouco difere dos padrões standard associados às opções sobre acções (e descritos na maioria das obras acerca deste último tipo de opções), como também porque o alargamento do âmbito da presente tese torná-la-ia demasiado extensa e desprovida de coerencia teórica.

Em termos teóricos, o principal contributo deste trabalho consiste na realização de um esforço de organização e agregação dos diversos modelos de avaliação associados às opções financeiras em estudo. Isto porque, tais modelos encontram-se expostos em bibliografia dispersa (nomeadamente, em diversas publicações períodicas da especialidade) e os livros existentes focalizam a sua atenção nas opções sobre acções, dispensando às opções financeiras sobre taxas de juro de longo prazo um espaço muito reduzido. Por outro lado, nalguns casos ir-se-á transpor para o âmbito das opções em análise, técnicas de avaliação anteriormente utilizadas sobre diferentes activos subjacentes: por exemplo, proceder-se-á à aplicação dos métodos de Monte Carlo e das diferenças finitas à avaliação de opções sobre futuros de obrigações do Estado; deduzir-se-à a fórmula de avaliação completa resultante da aplicação da "aproximação polinomial de Geske-Johnson" às opções "americanas" sobre futuros de títulos de dívida pública de longo prazo (Robert E. Whaley apenas formalizou parte do modelo, no artigo "On Valuing American Futures Options", *Financial Analysts Journal*, Maio-Junho de 1986, pp. 49-59); e, aplicar-se-à o método das diferenças finitas ao modelo de Schaefer e Schwartz.

No que concerne ao interesse prático de que esta tese poderá eventualmente revestir-se quando aplicada ao caso português, ele será certamente inequívoco quando e se for criado um mercado de produtos derivados (futuros e opções) sobre obrigações emitidas pelo Estado português. Mas mesmo que tal desiderato não venha a concretizar-se (ao contrário do que o projecto de criação de um mercado de "operações firmes a prazo", por parte da Bolsa de Valores do Porto, deixa prever; e até porque os títulos de dívida pública de longo prazo consubstanciam o activo subjacente dos primeiros contratos derivados a serem implementados em qualquer bolsa), a aplicação prática das conclusões deste estudo encontra já campo de aplicação a dois níveis do sistema financeiro português. O primeiro nível diz respeito à avaliação de "warrants" recentemente emitidos, em diversas praças financeiras internacionais, sobre obrigações do tesouro português (a principal diferença entre este "warrant" e o objecto de análise do trabalho reside no facto de o primeiro ser emitido por uma entidade privada). Em segundo lugar, a liberalização dos movimentos de capitais com o exterior tornou possível a aquisição de obrigações estrangeiras por parte de agentes económicos nacionais, cujo caso limite consiste na constituição de Fundos de Investimento Mobiliários com um património predominantemente assente em títulos de dívida emitidos no estrangeiro. Assim, qualquer agente económico nacional com uma carteira de obrigações estrangeiras poderá ter interesse em definir estratégias de gestão da carteira que passem pela utilização de mercados estrangeiros de produtos derivados.

Relativamente à organização do trabalho, foram considerados três grandes módulos. O primeiro é dedicado à descrição do modo de funcionamento dos contratos de opções sobre títulos de dívida pública de longo prazo, dos contratos de futuros sobre títulos de dívida pública de longo prazo e dos contratos de opções sobre futuros de títulos de dívida pública de longo prazo. Em seguida, no segundo capítulo da tese, procede-se ao estabelecimento de restrições sobre o valor das opções, com base no desenvolvimento de relações de arbitragem. Esta abordagem irá permitir deduzir limites de variação para o valor das opções (e portanto, definir as condições de exercício antecipado associadas a cada tipo de opção "americana") bem como estabelecer os denominados "teoremas de paridade put-call" (os quais serão objecto de utilização ao nível dos modelos de avaliação dos diversos tipos de opções "europeias"). Finalmente, o terceiro capítulo ocupa-se da dedução, descrição e apresentação da metodologia de utilização dos diversos modelos de avaliação de opções financeiras sobre taxas de juro de longo prazo, sendo dividido em dois subcapítulos: um dedicado à avaliação de opções sobre títulos de dívida pública de longo prazo e outro adstrito à avaliação de opções sobre futuros de títulos de dívida pública de longo prazo.

ÍNDICE

1. DEFINIÇÕES E MODO DE FUNCIONAMENTO

1.1. Terminologia

Uma *opção* é um contrato no qual se consagra o direito de comprar ("*call option*") ou de vender ("*put option*") uma dada quantidade ("*unidade de transacção*") de um determinado activo ("*activo subjacente*"), a um determinado preço ("*preço de exercício*") e numa ("*opção europeia*") ou até uma ("*opção americana*") data futura ("*maturidade da opção*").

Antes de avançar para o objecto de análise deste capítulo (estudo das opções financeiras sobre títulos de dívida pública de longo prazo), convém clarificar a terminologia contida na definição anterior:

- Call option *versus* Put option

Uma "call option" é uma opção de compra, ou seja, um contrato que confere (ao seu comprador) o direito de comprar uma dada quantidade de um determinado activo, a um determinado preço e numa ou até uma data futura. Por seu turno, uma "put option" é uma opção de venda, isto é, um contrato que confere (ao seu titular) o direito de vender uma dada quantidade de um determinado activo, a um dado preço e numa ou até uma data futura.

Como qualquer um destes dois tipos de opções pode ser comprado ou vendido, então é possível adoptar uma de quatro posições básicas num mercado de opções, a saber:
.a compra de uma opção de compra, posição designada por "*long call*";
.a venda de uma opção de compra, posição designada por "*short call*";
.a compra de uma opção de venda, posição denominada por "*long put*"; ou
.a venda de uma opção de venda, posição designada por "*short put*".

- Activo subjacente

O activo subjacente a uma opção corresponde ao activo sobre o qual o comprador do contrato detém um direito (de compra ou de venda), sendo o seu valor representado ao longo do presente capítulo pela letra "S".

- Unidade de transacção (UT)

À quantidade do activo subjacente que pode ser transaccionada mediante o exercício da opção dá-se o nome de "unidade de transacção". Tal como acontece com os contratos de "futuros", a dimensão da unidade de transacção varia de acordo com o activo subjacente.

- Preço de exercício

O preço de exercício de uma opção designa-se por "X" e traduz o valor ao qual o comprador do contrato pode (caso exerça a opção) comprar ou vender cada unidade do activo subjacente.

Assim, relacionando o valor do activo subjacente (S) com o preço de exercício da opção (X) é possível, do ponto de vista do comprador do contrato, tipificar a atractibilidade do exercício da opção em três situações básicas, ou seja:

.pode ser atractivo, para o comprador, exercer a opção, situação na qual se convencionou afirmar que a opção está "*in-the-money*";

.pode revelar-se indiferente o exercício da opção ou a sua manutenção em carteira, hipótese na qual é considerado que a opção está "*at-the-money*"; ou

.pode ser preferível manter a opção "viva" (isto é, não optar pelo seu exercício), dizendo-se então que a opção está "*out-of-the-money*".

Tendo em conta a natureza da opção ("call" ou "put"), o seu posicionamento numa das três situações standard anteriores pode ser resumido do seguinte modo:

	IN-THE-MONEY	AT-THE-MONEY	OUT-OF-THE-MONEY
CALL	$S > X$	$S \cong X$	$S < X$
PUT	$S < X$	$S \cong X$	$S > X$

- Opção europeia *versus* Opção americana

Atendendo ao momento temporal no qual uma opção pode ser exercida, qualquer opção (seja ela "call" ou "put") pode ser classificada como "europeia" ou "americana" (independentemente do posicionamento geográfico do mercado onde ela é transaccionada).

Assim, uma opção diz-se "europeia" quando apenas pode ser exercida, pelo comprador, na sua data de vencimento. Pelo contrário, uma "opção americana" pode ser exercida, pelo comprador, em qualquer momento anterior à sua data de vencimento.

- Maturidade da opção

Designa-se por maturidade de uma opção e representa-se por "T" a data na qual ("opção europeia") ou até à qual ("opção americana") o comprador pode exercer o seu direito.

- Prémio

O prémio de uma opção consiste no preço pago pelo seu comprador (ao respectivo vendedor), o qual corresponde ao valor do direito atribuído pela opção.

O facto de a transacção de uma opção implicar o pagamento de um prémio por parte do seu titular, justifica-se na medida em que o direito subjacente a tal contrato somente pode ser exercido pelo comprador , ou seja, visto que uma opção é um contrato assimétrico. Isto porque, enquanto o comprador de uma opção possui o direito, e não a obrigação, de a exercer, já ao seu vendedor apenas cabe a obrigação estrita de vender ("call option") ou comprar ("put option") a quantidade convencionada do activo subjacente no caso de a outra parte executar o seu direito de exercício.

No que concerne ao momento de pagamento do prémio, na maioria das bolsas o comprador da opção liquida o prémio na data de aquisição da mesma. Por seu lado, o vendedor da opção tem de constituir uma conta-margem, junto da "clearing house"[1], até à data de vencimento do contrato e por forma a garantir o cumprimento das obrigações assumidas. Na verdade, o comprador possui um direito, não sobre um determinado vendedor, mas sim sobre a "clearing house", ou seja, o risco de crédito inerente ao contrato é transferido para esta última entidade, o que torna irrelevante, sob o ponto de vista do titular do contrato, o conhecimento da identidade do respectivo vendedor[2].

1.2. Perfis de lucro na data de exercício de posições básicas sobre opções

O perfil de lucro de uma posição (compradora ou vendedora) sobre uma opção traduz as perdas e ganhos a ela associados, para diversos níveis do preço do activo subjacente (S) e num determinado período de tempo. O seu interesse reside no facto de a definição de

[1] Organismo, independente ou emanado da bolsa de opções, ao qual compete zelar pelo bom cumprimento dos contratos celebrados. A sua forma de funcionamento é em tudo idêntica à das câmaras de compensação dos contratos "futuros".

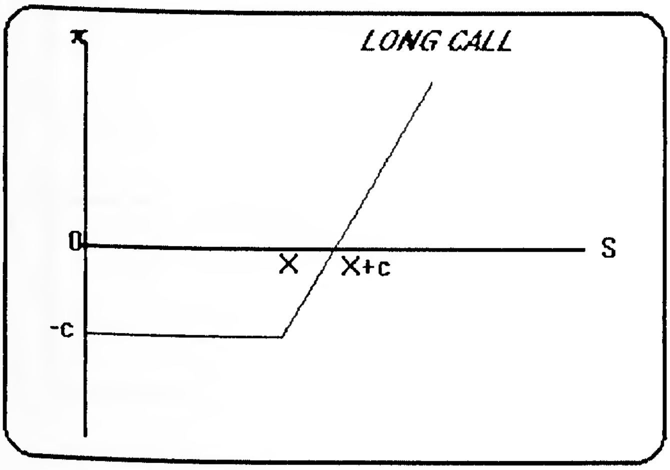
[2] Todavia, na LIFFE - London International Financial Futures Exchange- tanto o vendedor como o comprador de uma opção sobre um contrato "futuro" têm de constituir contas-margem, sendo o sistema de margem inicial, margem de manutenção e apuramento diário de resultados semelhante ao adoptado nas bolsas de "futuros". Deste modo, o prémio da opção continua a ser pago pelo comprador só que tal não acontece necessariamente na data de aquisição do contrato (tudo dependendo da evolução da cotação do "futuro"). De qualquer modo, ao longo deste trabalho será assumido o pagamento do prémio no inicio da vigência do contrato.

estratégias de cobertura (e de transacção) através de opções requerer o conhecimento do potencial de lucro associado a cada uma das quatro posições básicas na data de exercício das opções, até porque tais estratégias resultam muitas vezes da combinação de diversas posições básicas.

Na definição dos gráficos que se seguem foi admitido que qualquer uma das partes envolvidas na transacção de uma opção actua como sendo um agente económico racional. Contudo, é obvio que na prática poder-se-ão observar excepções às preposições apresentadas (por exemplo, um comprador de uma "call" poderá exercê-la, apesar de a opção estar "out-of-the-money", unicamente por razões de ordem fiscal).

1.2.1. *Long call*

Gráfico I



No gráfico I, "c" designa o prémio da "call", "π" representa o lucro (ou prejuízo) obtido pelo seu comprador na data de exercício da opção e "S" traduz o preço do activo subjacente nessa mesma data.

Se o preço de exercício da opção superar o valor do activo subjacente (S<X), o comprador não terá qualquer interesse em exercer o seu direito, ou seja, é preferível adquirir o activo subjacente no mercado spot. Consequentemente, a aquisição da opção traduzir-se-á na obtenção de um prejuízo equivalente ao prémio despendido no inicio da vigência do contrato, razão pela qual o perfil de lucro é horizontal para o intervalo de valores $S \in [0,X]$.

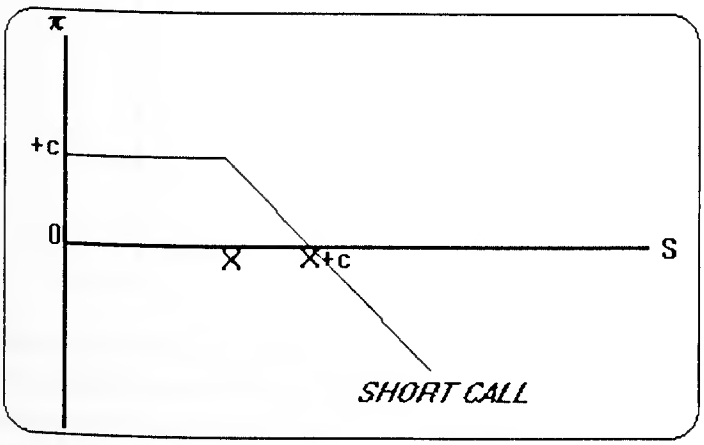
Caso contrário (S>X), já compensará exercer a opção uma vez que o activo subjacente é mais caro em mercado spot, razão pela qual $\pi > -c$. A partir do ponto $S = X$, o perfil de lucro passa a ser representado por uma recta com uma inclinação de 45 graus, na medida em que o resultado associado à compra da opção irá variar directamente com o preço do activo subjacente: $\pi = S - X - c$ para $S>X$.

O ponto de "break-even" deste investimento ($\pi = 0$) ocorre quando o preço do activo subjacente é igual à soma do preço de exercício com o prémio ($S = X + c$), pois caso tal aconteça então teria sido indiferente para o detentor do contrato adquirir a opção a "c" e exercê-la a "X" ou, em alternativa, comprar directamente o activo subjacente no mercado à vista ao preço "S". Este ponto é traduzido graficamente pela intersecção do perfil de lucro com o eixo das abcissas.

Esta posição básica torna-se lucrativa (π>0) somente a partir do momento em que S>X+c, pois só assim a aquisição indirecta do activo subjacente via o exercício da "call" é preferível relativamente à estratégia de compra do activo em mercado spot.

1.2.2. *Short call*

Gráfico II



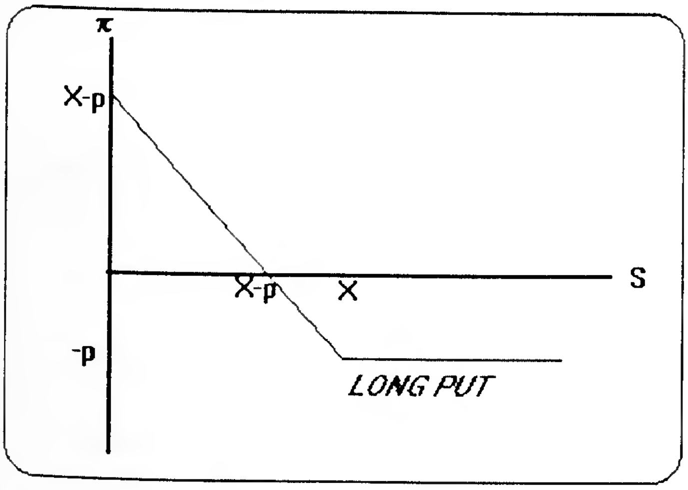
Representando agora "π" o lucro obtido na data de exercício de uma "call" pelo seu vendedor, se na data de exercício da opção o preço do activo subjacente for inferior ao preço de exercício da opção (S<X), então um comprador racional desta opção não a deverá exercer -conforme foi ilustrado anteriormente- e portanto o seu vendedor lucrará o prémio recebido no inicio da vigência do contrato (π = c). Daí o facto de o perfil de lucro corresponder a uma linha horizontal para o intervalo de valores S $\in$ [0,X].

No entanto, caso o preço do activo subjacente seja superior ao preço de exercício (S>X), então o lucro obtido pelo vendedor da "call" será necessariamente inferior ao prémio recebido (π<c), visto que o comprador da opção deve-la-á exercer ao preço X e portanto o seu vendedor terá de adquirir o activo subjacente, no mercado à vista, a um preço superior "S". Mais ainda, as perdas suportadas pelo vendedor da "call" em resultado do seu exercício (X-S) variam directamente com o preço do activo subjacente e portanto o perfil de lucro desta posição básica corresponde a uma recta com uma inclinação de 135 graus (π = -S + X + c) para S > X.

Mesmo assim, a posição do vendedor de uma "call" permanece lucrativa até ao ponto S = X+c. Para este nível do preço do activo subjacente o resultado desta posição básica é nulo (π = 0), dado que os valores recebidos aquando da venda (c) e do exercício (X) da opção são exactamente iguais ao valor que o vendedor tem de despender (S) para obter o activo subjacente necessário para a liquidação do contrato[3]. A partir deste ponto, as perdas associadas ao exercício da opção por parte do seu comprador (X-S) não são compensadas pelo prémio recebido (c < X-S) e então a posição torna-se deficitária ($\pi < 0$).

1.2.3. *Long put*

Gráfico III



No gráfico III, "p" designa o prémio pago pelo comprador da opção de venda e "π" representa o lucro obtido por este último, na data de exercício da "put".

Para valores de "S" superiores ao preço de exercício (S>X) o perfil de lucro apresenta-se "flat" (π = -p). Isto porque, como para tais níveis do preço do activo subjacente não se afigura racional o exercício da opção -pois, é preferível vender o activo subjacente no mercado spot por um preço superior - então o resultado da "put" resume-se ao prémio inicialmente pago.

Quando a opção de venda está "in-the-money" (S<X), o seu exercício é a estratégia a adoptar por parte de um comprador racional, pois desse modo é possível obter um maior valor para o activo subjacente (do que aquele que é atribuído pelo mercado)[4]. Deste modo, o resultado auferido pelo detentor da opção de venda será necessariamente superior ao prémio pago (π>-p) e variará na mesma proporção da evolução do preço do activo (π = -S + X-p), isto é, será representado por uma recta com uma inclinação de 135 graus. No máximo, tal resultado será igual à diferença entre o preço de exercício e o prémio (π = X-p) na hipótese teórica do preço do activo subjacente ser nulo (S = 0).

---

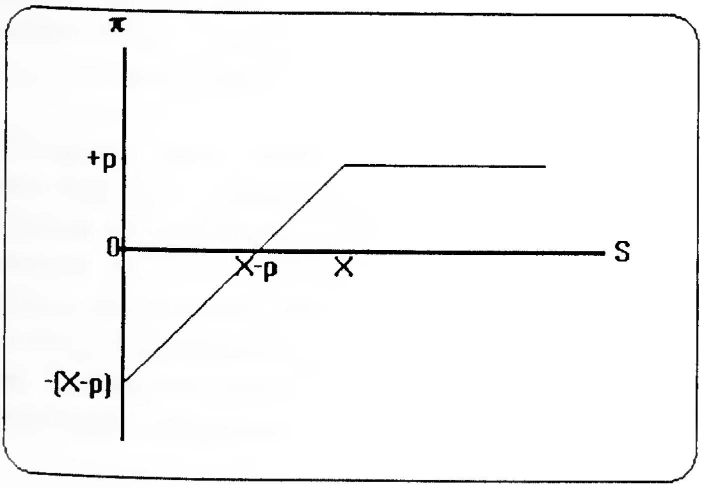
[3]Mesmo que o vendedor do contrato tenha em sua posse o activo subjacente na data de exercício da opção, não necessitando portanto de o adquirir no mercado spot, este incorre sempre num custo de oportunidade, o qual consiste no facto de ter de entregar ao comprador da "call" um activo pelo preço de X, quando, caso não estivesse vinculado a tal obrigação, poderia transacciona-lo no mercado por um preço mais elevado (S).

[4]A formulação da decisão quanto ao exercício de uma opção, por parte do seu comprador, depende somente da relação existente entre "S" e "X", ou seja, em nada é afectada pelo valor do prémio da opção, visto que tal prémio é pago no inicio da vigência do contrato e portanto terá de ser suportado quer a opção seja exercida ou não.

De qualquer modo, a aquisição de uma opção de venda apenas será rentável (π>0) a partir do ponto em que "S" se torna inferior à diferença entre o preço de exercício e o prémio pago. Nesta situação (S = X-p) e para o comprador, é indiferente ter adquirido a opção por "p" e, na data de exercício, vender o activo por "X" (ao vendedor da opção), ou então não ter comprado a "put" e recorrer ao mercado spot para ceder o activo ao preço "S"; pelo que, π = 0.

1.2.4. *Short put*

Gráfico IV



Considere-se, por último, o perfil de lucro na data de exercício de uma opção de venda, mas desta feita sob o ponto de vista do seu vendedor (o qual é representado pela variável "π" do gráfico IV).
Se a opção estiver "out-of-the-money" (S>X), o seu comprador não deverá em princípio exercê-la, pelo que o seu vendedor não terá de adquirir o activo subjacente ao preço de exercício e portanto o resultado obtido por este último será igual ao prémio recebido, isto é, π = p para S>X (troço horizontal do gráfico IV).

Na hipótese contrária (S<X), o resultado auferido pelo vendedor da "put" será forçosamente inferior (π<p), dado que, em princípio, a opção será exercida e consequentemente o vendedor terá de adquirir um activo pelo preço "X" quando, em mercado spot, ele apenas poderá ser vendido por "S". Mais ainda, as perdas associadas ao exercício da opção serão tanto maiores quanto mais baixo for o preço do activo subjacente (de onde decorre a inclinação positiva do perfil de lucro, para S<X) e variarão na mesma proporção da variação de "S" ($\pi = S - X + p$, ou seja, $d\pi/dS = 1$). No limite, o prejuízo desta posição básica ascenderá à diferença negativa entre o preço de exercício (pago) e o prémio (recebido), quando o preço do activo subjacente é nulo.

Tal como na posição básica anterior, o ponto de "break-even" (π = 0) é alcançado quando S = X-p, situação na qual o preço que o vendedor paga ao comprador da "put" (X) é exactamente compensado pelo prémio recebido (p) mais o valor obtido através da alienação do activo no mercado à vista (S). A partir deste ponto, as perdas associadas ao exercício da opção de venda (S-X) não conseguirão ser compensadas através do prémio recebido (p), e portanto $\pi < 0$.

1.2.5. Conclusões

Com base nos quatro diagramas apresentados nos quesitos antecedentes, é possível retirar duas grandes ilações.

Em primeiro lugar, constata-se que os perfis de lucro do comprador e do vendedor de uma mesma opção (seja ela uma "call" ou uma "put") são exactamente simétricos. Tal significa somente que o investimento em opções constitui um "jogo de soma nula", no sentido em que os ganhos ou perdas de uma das partes do contrato constituem as perdas ou os ganhos da parte contrária.

Em segundo lugar, observa-se que o comprador de uma opção detém um potencial de perda limitado ao prémio pago e um potencial de lucro "ilimitado"[5], enquanto que o vendedor de uma opção possui um potencial de lucro limitado ao prémio recebido e um potencial de perda "ilimitado". Este facto, torna o investimento em opções bastante atractivo uma vez que, não só permite o aproveitamento de evoluções favoráveis do preço do activo subjacente (ao contrário do que sucede com o recurso ao mercado de futuros) com também restringe o capital em risco ao prémio pago (o que não acontece em investimentos realizados directamente no mercado spot do activo subjacente).

[5] Na verdade há sempre um limite para o potencial de lucro de uma posição longa sobre uma opção: seja porque, no caso de uma "call", existe um limite máximo de crescimento do preço do activo subjacente, ou porque, no caso de uma "put", o preço do activo subjacente não pode ser negativo.

1.3. Opções financeiras sobre obrigações: modo de funcionamento

A terminologia apresentada anteriormente bem como a descrição dos perfis de lucro associados às posições básicas sobre opções, aplicam-se a qualquer tipo de "opção" independentemente da natureza do activo subjacente. Todavia, dado que o objectivo deste trabalho consiste na análise de modelos de avaliação de opções financeiras sobre obrigações de dívida pública, torna-se então necessário conhecer de forma mais pormenorizada o funcionamento deste tipo particular de opções.

Uma opção financeira não é mais do que uma opção cujo activo subjacente corresponde a um instrumento financeiro. Assim e retomando a definição apresentada no começo deste capítulo, pode-se dizer que uma opção financeira é um contrato que confere o direito de comprar ou de vender uma dada quantidade de um determinado activo financeiro, a um determinado preço e numa ou até uma data futura.

O conjunto das opções financeiras pode ser decomposto em dois grandes grupos, a saber:
i) as opções sobre taxas de juro de curto prazo[6]; e
ii) as opções sobre taxas de juro de longo prazo.

Esta última categoria de opções financeiras, a qual irá constituir o objecto de análise do presente trabalho, ainda se desdobra em dois tipos:
ii1) opções financeiras sobre títulos de dívida pública de longo prazo ("options on the spot"); e
ii2) opções financeiras sobre futuros de títulos de dívida pública de longo prazo ("options on futures").

1.3.1. Opções sobre títulos de dívida pública de longo prazo (TDP/LP)

Uma opção sobre um título de dívida pública de longo prazo é então uma opção financeira cujo activo financeiro subjacente consiste numa determinada obrigação emitida pelo Estado a longo prazo. Dito de outro modo, tal opção é um contrato que consagra o direito de comprar ("call") ou de vender ("put") um determinado TDP/LP, a um dado preço e numa ("opção europeia") ou até uma ("opção americana") data futura.

O prémio da opção é pago pelo comprador no inicio da vigência do contrato[7] e incide sobre cada unidade monetária do valor de cada contrato, estando definido em unidades do

[6]As quais, por seu turno, ainda se subdividem em opções sobre títulos de dívida pública de curto prazo (por exemplo, opções sobre Bilhetes do Tesouro) e em opções sobre taxas de juro do mercado monetário (por exemplo, opções sobre futuros da taxa de juro do eurodolar a 3 meses).
[7]Ou durante a sua vigência, de acordo com o sistema de margens em vigor na LIFFE.

valor nominal do TDP/LP subjacente. Assim sendo, o montante do prémio associado à aquisição deste tipo de opções é calculado do seguinte modo:

Prémio (em valor) = UT . N . (c ou p)/Vn (1)

sendo,

UT ≡ unidade de transacção ou valor nominal do contrato (produto entre o número de obrigações incluído em cada contrato e o seu valor nominal);
N ≡ número de contratos celebrados;
Vn ≡ valor nominal do TDP/LP que serve de activo subjacente ao contrato;
c ≡ prémio de uma opção de compra ("call");e
p ≡ prémio de uma opção de venda ("put").

Exemplo N°1: Admita-se que um determinado Fundo de Investimento pretende adquirir 20 opções de venda sobre obrigações de dívida pública a 5 anos, com um cupão semestral de 13% e um valor nominal de 2.000$00, a um preço de exercício de 2.100$00. Considere-se ainda que se tratam de contratos com um valor nominal de 10.000 contos e que o prémio a pagar por cada opção, para um preço de exercício de 2.100$00, é de 10$00.

Tal significa que para adquirir cada contrato é necessário pagar 0.5% (10$00/2.000$00) do seu valor nominal, ou seja, 50 contos (10.000 contos x 0.5%). Como, neste caso, há lugar à aquisição de vinte contratos, então o valor a pagar pelo seu comprador deverá ser de 1000 contos (50 contos x 20), ou seja, aplicando a formula (1):

1000 contos = 10.000 contos x 20 x 10$00/2.000$00

No que concerne ao modo de exercício deste tipo de opções, ele poderá ser executado pelo comprador, na data de vencimento do contrato ("opções europeias") ou até esse mesmo momento, inclusive ("opções americanas"). Caso tal aconteça, o comprador de uma opção de venda (ou o vendedor de uma opção de compra) terá de entregar ao vendedor da "put" (ou ao comprador da "call") um número de TDP/LP subjacentes ao contrato igual a

(UT . N)/Vn, (2)

ou seja, um número de obrigações, subjacentes ao contrato, cujo valor nominal (produto entre o n° de títulos e o valor nominal de cada título) seja igual ao valor nominal do conjunto de contratos celebrados.

Retomando o exemplo n°1, o exercício dos vinte contratos pelo Fundo de Investimento irá implicar a entrega, por parte deste, de 100.000 (10.000 contos x 20 x 1/2) obrigações de dívida pública. Deste modo, como o valor nominal de cada obrigação é de 2.000$00, então o valor nominal do conjunto de obrigações entregue corresponderá a 200.000 contos (200.000 obrigações x 2 contos), o que não é mais do que o valor nominal dos vinte contratos (10.000 contos x 20 contratos).

Em contrapartida, o comprador da opção de compra (ou o vendedor da opção de venda) terá de pagar ao vendedor da "call" (ou ao comprador da "put") cada obrigação ao respectivo preço de exercício (bem como eventuais juros vencidos desde o vencimento do último cupão), isto é:

$$\textbf{(UT . N)/Vn . Xc ou Xp + J} \tag{3}$$

sendo,

Xc ≡ preço de exercício da opção de compra;
Xp ≡ preço de exercício da opção de venda; e
J ≡ juros vencidos.

Considerando novamente o exemplo n°1, suponha-se ainda que os contratos são adquiridos na data de vencimento de um cupão e que são exercidos passados três meses. Assim sendo, o Fundo de Investimento irá receber por cada uma das 100.000 obrigações entregues o respectivo preço de exercício (2.100$00), acrescido dos juros vencidos, o que perfaz:

(10.000 contos x 20 contratos)/2 x 2.100$00 +

+ 100.000 obrigações x 2.000$00 x 13% x 3/12 =

= 210.000 contos + 6.500 contos = 216.500 contos.

Em síntese, o exercício, pelo comprador, de uma opção de compra (opção de venda) sobre um TDP/LP implica a compra (venda) do TDP/LP ao preço de exercício da opção:

	exercício	
LONG Xc CALL	⇒	LONG TDP/LP a Xc
LONG Xp PUT	⇒	SHORT TDP/LP a Xp

1.3.2. Opções sobre futuros de TDP/LP

1.3.2.1. O activo subjacente: futuros sobre TDP/LP

Antes de explicitar o modo de funcionamento deste tipo de opções, convém efectuar uma breve análise do respectivo activo subjacente.

Em termos genéricos, um *futuro* é um contrato no qual duas partes (o comprador e o vendedor do futuro) fixam o preço ao qual um determinado activo (designado por activo subjacente) irá ser transaccionado numa determinada data futura (a data de vencimento do futuro). No fundo, um "futuro" corresponde à fixação de um preço a prazo, muito embora não deva ser confundido com um contrato a prazo (ou "forward") devido ao facto:

i) de os futuros serem transaccionados num mercado organizado (Bolsa de futuros);

ii) de os futuros serem contratos altamente estandardizados[8]; e

iii) de o risco de crédito de um contrato futuro estar substancialmente limitado, em virtude da existência de uma câmara de compensação ("Clearing House") e de um sistema de margens (inicial e de manutenção), conforme mais adiante será referido.

Por seu turno, um *futuro financeiro* é um contrato futuro cujo activo subjacente é um produto financeiro. Assim, estes contratos podem ser subdivididos em três grandes categorias:

i) futuros financeiros de divisas;

ii) futuros financeiros sobre índices; e

iii) futuros financeiros de taxas de juro, os quais poderão incidir sobre:

  iii1) instrumentos de curto prazo (por exemplo, futuros sobre Bilhetes do Tesouro); ou

  iii2) instrumentos de longo prazo.

Ora, esta última categoria (iii2) constitui os designados futuros financeiros de taxas de juro de longo prazo, ou seja, os futuros sobre TDP/LP, os quais são normalmente o primeiro tipo de futuro financeiro a ser implementado em qualquer bolsa de futuros. Seguidamente ir-se-á proceder à descrição das características essenciais deste contrato:

\- Prazo do contrato

Tal como acontece com a generalidade dos "futuros", normalmente um contrato futuro sobre TDP/LP possui uma duração de três meses.

---

[8] O que, apesar de retirar flexibilidade a este instrumento financeiro, fomenta a sua liquidez.

- TDP/LP estandardizado

O activo subjacente de um futuro sobre taxas de juro de longo prazo consiste num título de dívida pública (de taxa fixa, obviamente), pois tratando-se de uma obrigação emitida pelo Estado então elimina-se o factor "risco de crédito" enquanto elemento de determinação da cotação do futuro (isto é, a evolução da cotação do futuro pode assim reflectir apenas as alterações verificadas ao nível da estrutura temporal de taxas de juro). Mais ainda, dada a existência de um grande número de TDP/LP com características diferentes e de forma a fomentar a liquidez do contrato futuro, o título de dívida pública subjacente consiste num TDP/LP teórico (isto é, não transaccionado em mercado spot) estandardizado (ou seja, com um valor nominal, uma taxa de cupão, a periodicidade dos cupões e a maturidade pré-definidos e normalmente correspondentes às características mais comuns entre os títulos transaccionados no mercado à vista), definido pela bolsa de futuros.

- Unidade de transacção

A unidade de transacção ou valor nominal de um contrato futuro consiste no produto entre o número de TDP/LP estandardizados incluídos nesse contrato e o valor nominal desses mesmos títulos. Este parâmetro é definido pela bolsa de futuros e constitui um limite mínimo imposto ao montante das transacções realizadas sobre estes instrumentos financeiros.

- Cotação

Aquando da celebração do contrato futuro, ambas as partes fixam a cotação inicial do futuro e, até à sua data de vencimento, é formada diariamente uma cotação[9] na bolsa de futuros, a qual irá permitir não só o apuramento diário do resultado do futuro como também a eventual liquidação do contrato antes do seu vencimento.

No caso particular dos futuros sobre TDP/LP, a sua cotação corresponde ao valor actual dos cash-flows associados ao TDP/LP estandardizado subjacente ao contrato a partir da data de vencimento do futuro, sendo as taxa de actualização dadas pelas taxas de juro que o mercado espera que vigorem no mercado à vista de títulos de dívida pública de longo prazo, na data de vencimento do contrato, ou seja:

$$F_u = \sum_{m<k\leq M} \frac{CF_k}{\left[1+r_u^e(m,k)\right]}$$

sendo,

$F_u \equiv$ cotação do futuro no momento "u";

$M \equiv$ data de vencimento do TDP/LP estandardizado;

[9]Nalgumas bolsas a cotação dos futuros está sujeita a limites máximos de variação.

$m \equiv$ data de vencimento do contrato futuro ($u < m < M$);

CF_k $\equiv$ cash-flow gerado (teoricamente) pelo TDP/LP estandardizado, no momento "k"; e

$r_u^e(m,k)$ $\equiv$ taxa de juro que, no momento "u", o mercado espera vir a vigorar entre os momentos "m" e "k".

Exemplo Nº 2: Considere-se um futuro sobre TDP/LP com vencimento dentro de dois meses, com uma cotação de 124.58 e cujo TDP/LP estandardizado subjacente apresenta as seguintes características:
- valor nominal = 100;
- taxa do cupão = 14%;
- periodicidade dos juros: cupão anual; e
- tempo em falta para a maturidade = 10 anos e dois meses.

Assim sendo e assumindo uma estrutura temporal de taxas de juro horizontal, podemos dizer que o mercado espera que as taxas de juro dentro de dois meses rondem os 10%, pois:

$$14 \cdot A_{\overline{10}|10\%} + \frac{100}{(1+0,1)^{10}} = 124.58.$$

- Margem inicial

Aquando da celebração de um contrato futuro, o comprador e o vendedor são obrigados a efectuar um depósito de garantia junto da bolsa de futuros, o qual é designado por "margem inicial"[10]. O objectivo consiste em criar uma conta-corrente entre o comprador ou o vendedor e a bolsa, através da qual será efectuada a liquidação diária dos resultados, bem como garantir o bom pagamento desses mesmos resultados.

- Apuramento de resultados

Diariamente e até à liquidação do contrato, as contas-margem dos intervenientes no mercado de futuros sobre TDP/LP são debitadas ou creditadas pelo montante do resultado diário, o qual é apurado do seguinte modo:

$$\text{Resultado do dia "u"} = \left| UT \cdot N \cdot \frac{F_u - F_{u-1}}{Vn} \right|$$

sendo,

[10] Em determinadas bolsas de futuros a margem inicial pode não ser realizada em numerário (mas sim efectuada, por exemplo, contra a entrega de títulos de dívida pública de curto prazo).

UT ≡ unidade de transacção do contrato;
N ≡ número de contratos celebrados;
F_u ≡ cotação do futuro no dia "u"[11]; e
Vn ≡ valor nominal do TDP/LP estandardizado[12].

Por convenção, o resultado diário do futuro é recebido pelo comprador quando a cotação sobe ($F_u > F_{u-1}$) e recebido pelo vendedor se a cotação descer ($F_u < F_{u-1}$), ou seja:

Liquidação do resultado do futuro

Se	COMPRADOR	VENDEDOR
$F_u > F_{u-1}$	Recebe	Paga
$F_u < F_{u-1}$	Paga	Recebe

Retomando o exemplo anterior, imagine-se que no dia seguinte a cotação do futuro passa de 124.58 para 123.80 e que o valor nominal de cada contrato ("UT") é de 10.000 contos. Se assim suceder, então o resultado associado a um contrato futuro (N = 1) será de

$\left| 10.000 \times 1 \times \frac{123.80 - 124.58}{100} \right| = 78$ contos, o qual deverá ser pago pelo comprador do futuro (pois, 123.80 < 124.58).

- Margem de Manutenção

A "margem de manutenção" constitui o limite mínimo da conta-corrente comprador/bolsa ou vendedor/bolsa. A este propósito e durante o processo de apuramento de resultados (isto é, desde a celebração do contrato e até à sua liquidação), duas situações limite são possíveis:
i) quando o saldo da conta-margem se torna superior à margem inicial, então o comprador ou o vendedor podem sacar os fundos em excesso da conta;
ii) quando o saldo da conta-corrente se torna inferior à margem de manutenção, então o seu titular é obrigado a entregar à bolsa os fundos necessários (neste caso, forçosamente em numerário) para repor a margem inicial.[13]

Com vista a ilustrar o funcionamento do sistema de margens no mercado de futuros, considere-se a evolução do saldo da conta-corrente de um comprador de um contrato definido no exemplo nº 2, sabendo-se ainda que a margem inicial corresponde a 1% do

[11] Em rigor, trata-se da cotação de fecho fixada pela bolsa de futuros no final de cada sessão ("settlement price"), a qual corresponde normalmente à cotação a que foram realizadas as últimas transacções do dia.
[12] Regra geral, convenciona-se igual a 100 unidades monetárias.
[13] Caso contrário, a sua posição contratual será cancelada pela bolsa, mediante a realização de uma operação inversa no mercado de futuros.

valor nominal do contrato (100 contos) e que a margem de manutenção é igual a 75% da margem inicial (75 contos):

Dia	Saldo da conta-corrente (em contos)	Cotação do futuro	Resultado diário do futuro (em contos)	Variação do saldo da conta-corrente (em contos)
1	100[14]	120.00	-	-
2	100	119.90	(10)	-[15]
3	90	119.70	(20)	30[16]
4	100	119.70	-	-
5	100	119.80	10	(10)[17]

- <u>Liquidação do contrato</u>

A extinção de um contrato futuro pode ter lugar de duas formas:
i) Regra geral, em qualquer momento compreendido entre as datas de celebração e de vencimento do futuro, mediante a realização, em bolsa, de uma transacção inversa à inicial (venda de um futuro pelo comprador ou compra de um futuro pelo vendedor); ou ainda
ii) Na data de vencimento do contrato, através da liquidação física do mesmo, ou seja, via entrega, por parte do vendedor, do activo subjacente.

No caso particular dos futuros sobre TDP/LP, como o activo subjacente consiste num TDP/LP teórico estandardizado (não transaccionado em mercado), as bolsas de futuros publicam uma listagem de TDP/LP disponíveis no mercado à vista e que podem ser utilizados na liquidação física dos contratos de futuros sobre TDP/LP: são os denominados *TDP/LP de liquidação.*

Assim, na data de vencimento do futuro, o seu vendedor tem de entregar ao respectivo comprador um número de TDP/LP de liquidação[18] tal que o valor nominal desse conjunto de obrigações (n° de títulos de liquidação x valor nominal desses títulos) seja igual ao valor nominal do conjunto de contratos celebrados (UT x N), ou seja:

(UT . N)/Vn(L) títulos de liquidação
sendo,

Vn(L) ≡ valor nominal de cada TDP/LP de liquidação.

[14]Margem inicial.
[15]Não é necessário efectuar qualquer reforço, pois o saldo da conta-corrente ainda supera a margem de manutenção: 100 - 10 > 75.
[16]Como 90 - 20 = 70 < 75, então há que repor a margem inicial (30 = 100 - 70).
[17]O comprador pode retirar 10 contos da sua conta-margem, visto este ser o montante em excesso relativamente à margem inicial.
[18]O TDP/LP de liquidação utilizado é seleccionado pelo vendedor na data de vencimento do futuro, de entre todas as obrigações presentes na listagem publicada pela bolsa.

Por seu turno, o comprador do futuro paga cada título de liquidação recebido à cotação do futuro na sua maturidade[19] (F_m) corrigida por um *factor de conversão* (constante na listagem dos títulos de liquidação e cujo significado será explicitado mais adiante), tendo também de entregar ao vendedor eventuais juros vencidos pelas obrigações de liquidação, isto é, paga ao todo o montante

$$\frac{UT \cdot N}{Vn(L)} \times \frac{F_m}{Vn} \times Fc \times Vn(L) + J$$

sendo,

$Fc \equiv$ factor de conversão associado ao TDP/LP de liquidação utilizado; e
$J \equiv$ juros vencidos.

Concretizando, admita-se que, na data de vencimento, o vendedor do contrato descrito no exemplo n° 2 opta por proceder à sua liquidação física mediante a entrega de obrigações do Estado com um valor nominal de 1.000$00, reembolso na maturidade e um cupão semestral à taxa anual de 16%, tendo o último cupão sido liquidado há 3 meses. Se o factor de conversão associado a estes últimos títulos for igual a 1,07 e a cotação do futuro na maturidade ascender a 125.00, então o vendedor terá de entregar um número de títulos de liquidação igual a

(10.000 contos x 1 contrato) / 1 conto = 10.000 TDP/LP de liquidação.

Em contrapartida, o comprador do contrato deverá pagar

$$\frac{10.000 \text{ contos x 1 contrato}}{1 \text{ conto}} \text{ x } 125/100 \text{ x } 1.07 \text{ x } 1 \text{ conto } +$$

$$+ \text{ 10.000 obrigações x 1 conto x } 16\% \text{ x 3 meses / 12 meses } =$$

$$= \text{ 13.375 contos } + \text{ 400 contos } = \text{ 13.475 contos.}$$

- Factor de conversão

Na listagem de TDP/LP de liquidação, publicada pela bolsa de futuros, é atribuído a cada obrigação um factor de conversão, o qual permanece constante durante toda a vigência do

[19] Apesar de a transacção do "activo subjacente" ser feita à cotação final do futuro (F_m), em termos efectivos o seu preço é formado com base na cotação do futuro à data de celebração do contrato, uma vez que a diferença entre as duas cotações é compensada via liquidação diária dos resultados do futuro (desprezando, evidentemente, os desfasamentos temporais entre o apuramento diário de resultados e a liquidação física do contrato).

contrato. Cada factor de conversão expressa o número de TDP/LP estandardizados equivalente a cada um dos TDP/LP de liquidação, na data de vencimento do futuro.

De facto, como o TDP/LP estandardizado é uma obrigação meramente teórica, então a liquidação física do futuro tem de ser efectuada através de uma outra obrigação de liquidação, de onde resulta a necessidade da existência de uma relação de equivalência entre o preço destes dois títulos aquando da data de vencimento do contrato. Por outro lado, essa relação de equivalência deverá ser tal que a taxa de rentabilidade efectiva obtida pelo comprador do futuro ao pagar as obrigações de liquidação seja aproximadamente igual àquela que seria obtida caso fosse possível receber os TDP/LP estandardizados a um preço unitário dado pela cotação do futuro no seu vencimento.

Deste modo, cada factor de conversão é calculado determinando-se o preço do respectivo TDP/LP de liquidação, por unidade monetária de valor nominal e na data de vencimento do futuro, para o qual a sua "yield to maturity" é igual à taxa do cupão do TDP/LP estandardizado:

$$Fc = \sum_{m<k\leq m'} \frac{cf'_k}{(1+j)^k}$$ [20]

sendo,

$cf'_k \equiv$ cash-flow unitário gerado pelo TDP/LP de liquidação no momento "k";
$m' \equiv$ data de vencimento do TDP/LP de liquidação; e
$j \equiv$ taxa do cupão do TDP/LP estandardizado.

- <u>Obrigação de Menor Custo</u>

Não obstante o vendedor do futuro ter à sua disposição diversos TDP/LP de liquidação, ele deverá seleccionar aquele que lhe proporcione um maior diferencial positivo entre o

---

[20] É obvio que esta relação de equivalência só será exacta se $F_m = Vn$, pois apenas nesta hipótese a "yield to maturity" do TDP/LP estandardizado coincide com a sua taxa de cupão. Contudo, para que tal relação fosse perfeita haveria que:

1º) Determinar a "yield to maturity" (YTM) dos TDP/LP estandardizados, na data de vencimento do futuro, fazendo

$$\text{YTM:} \quad F_m = \sum_{m<k\leq M} \frac{CF_k}{(1+YTM)^k};$$

2º) Calcular o factor de conversão na data de vencimento do futuro, fazendo

$$Fc = \sum_{m<k\leq m'} \frac{cf'_k}{(1+YTM)^k}.$$

Ora, este procedimento não permitiria que os factores de conversão fossem constantes durante a vida do futuro.

valor entregue pelo comprador do futuro, por obrigação de liquidação ($\frac{F_m}{Vn} \times Fc \times Vn(L) + J$[21]), e o valor de transacção (valor de cotação acrescido de juros vencidos) dessa mesma obrigação[22]. Este TDP/LP de liquidação que maximiza o ganho do vendedor é designado por "obrigação de menor custo" e a sua adopção é extensível à generalidade dos titulares de posições "curtas" na data de vencimento dos futuros.

Consequentemente, **na data de vencimento do futuro, a sua cotação final corrigida pelo factor de conversão da obrigação de menor custo converge para o valor de cotação desse mesmo TDP/LP de liquidação**, isto é,

$$\frac{F_m}{Vn} \times Fc \times Vn(L) = Vc_m(L)$$

sendo,

$Vc_m(L) \equiv$ valor de cotação do TDP/LP de liquidação, na data de vencimento do futuro.

Isto porque, a não verificação da anterior igualdade implicaria a existência de oportunidades de arbitragem, as quais seriam imediatamente anuladas através da prossecução de uma das seguintes estratégias:

i) caso $\frac{F_m}{Vn} \times Fc \times Vn(L) > Vc_m(L)$, haveria simultaneamente lugar à compra de obrigações de menor custo, ao preço de "$Vc_m(L)+J$", e à venda de futuros, os quais seriam liquidados com as obrigações compradas e proporcionariam um encaixe financeiro de "$\frac{F_m}{Vn} \times Fc \times Vn(L) + J$". A implementação desta estratégia pressionaria a cotação dos futuros no sentido da baixa (e tenderia a elevar o preço das obrigações) até ser restabelecida a anterior relação de equilíbrio;

ii) Na hipótese contrária, assistir-se-ia à compra de futuros e consequente alienação das obrigações de menor custo (recebidas via futuros e pagas a "$\frac{F_m}{Vn} \times Fc \times Vn(L) + J$") por um preço de "$Vc_m(L)+J$", daí resultando uma subida da cotação dos futuros (e descida do preço das obrigações) conducente ao restabelecimento da anterior igualdade.

[21] Juros vencidos por cada TDP/LP de liquidação.

[22] Afinal, o custo (explícito ou implícito) de cada obrigação (adquirida ou não vendida) utilizada na liquidação física do contrato.

1.3.2.2. O contrato de opção

Ao contrário de uma opção "on the spot", uma opção sobre um futuro de um TDP/LP consagra o direito de comprar ("call") ou de vender ("put") um contrato "futuro" sobre esse TDP/LP (e não o próprio título), a um determinado preço e numa ("opção europeia") ou até uma ("opção americana") data futura. Isto é, o activo subjacente à opção é um contrato "futuro" e não um TDP/LP. Aliás, esta é a razão pela qual, as datas de vencimento deste tipo de opções coincidem com as maturidades definidas para os contratos "futuros" subjacentes[23].

Desta forma, o exercício de uma opção sobre um futuro de TDP/LP faz com que o comprador de uma opção de compra (ou o vendedor de uma opção de venda) passe a ser comprador de um futuro, com uma cotação inicial igual ao preço de exercício da opção, e o comprador de uma opção de venda (ou o vendedor de uma opção de compra) passe a ser vendedor de um futuro, também com uma cotação inicial idêntica ao preço de exercício da opção:

	exercício	
LONG Xc CALL	$\Rightarrow$	LONG Xc FUTURE
LONG Xp PUT	$\Rightarrow$	SHORT Xp FUTURE

Por outro lado e tal como acontece nos futuros financeiros sobre taxas de juro de longo prazo, o activo financeiro subjacente aos contratos "futuros" sobre os quais incidem estas opções continua a ser um TDP/LP estandardizado e meramente teórico (ou seja, um título não transaccionado em mercado spot).

Relativamente ao prémio da opção, ele também é pago pelo seu comprador no inicio da sua vigência (ou ao longo da sua duração, de acordo cm o sistema de margens em vigor na LIFFE) e incide sobre cada unidade monetária do valor do contrato, estando definido em unidades do valor nominal do TDP/LP estandardizado. Mais uma vez, a sua fórmula de cálculo é dada por:

$$\textbf{Prémio (em valor)} = \mathbf{UT \,.\, N \,.\, (c \text{ ou } p)/Vn} \qquad (4)$$

sendo,

UT ≡ unidade de transacção ou valor nominal do contrato (produto entre o número de TDP/LP estandardizados incluído em cada contrato e o seu valor nominal);
N ≡ número de contratos celebrados;
Vn ≡ valor nominal do TDP/LP estandardizado;

[23] Portanto, também as opções sobre futuros funcionam normalmente por ciclos trimestrais.

c ≡ prémio de uma opção de compra ("call");e

p ≡ prémio de uma opção de venda ("put").

Exemplo Nº3: Imagine-se que uma determinada instituição de crédito pretende adquirir 21 opções de venda sobre futuros de TDP/LP com um preço de exercício de 120.00 e a um prémio de 1. Considere-se ainda que o valor nominal de cada contrato é de 10.000 contos e que o valor nominal do TDP/LP estandardizado é igual a 100.

De acordo com os parâmetros deste exemplo, o comprador das "put options" terá então de pagar 1% (1/100) do valor nominal dos 21 contratos (10.000 contos x 21 contratos), isto é,

(10.000 contos x 21 contratos) x 1/100 = 2.100 contos.

Quanto ao exercício da opção (pelo seu comprador), ele poderá ocorrer apenas na data de vencimento da opção (e do futuro), caso se trate de uma "opção europeia", ou em qualquer momento não posterior a essa data, no caso das "opções americanas". Como os procedimentos decorrentes do exercício de uma opção sobre futuros de TDP/LP variam em função do momento no qual o exercício ocorre, ir-se-á analisar cada hipótese de per si.

i) exercício numa data anterior à maturidade da opção

Tal como foi referido anteriormente, o exercício de uma opção sobre futuros implica a transformação de uma posição sobre o mercado de opções para a correspondente posição sobre o mercado de futuros. Portanto, caso o exercício da opção ocorra antes de atingida a sua data de vencimento (bem como antes da maturidade do "futuro" a ela associado), em princípio, haverá apenas que proceder ao apuramento do resultado do futuro, o qual (tendo em conta a metodologia definida no quesito 1.3.2.1.) corresponderá a

$$\mathbf{UT \,.\, N \,.\, (F_l - Xc \text{ ou } Xp)/Vn} \qquad (5)$$

sendo,

l ≡ momento de exercício da opção, anterior à data de vencimento desta;

F_l ≡ cotação do futuro no momento "l";

Xc ≡ preço de exercício de uma opção de compra; e

Xp ≡ preço de exercício de uma opção de venda.

Todavia, se na data de exercício da opção for efectuada, no mercado de futuros, uma operação simétrica à posição resultante do exercício da opção, ou seja, se o vendedor/comprador de "futuros" comprar/vender esses mesmos "futuros" à cotação "Fl", então proceder-se-á à liquidação do resultado anterior, de acordo com o seguinte critério:[24]

Se F_l > Xc ou Xp ⇒ o comprador da "call" (vendedor da "put") recebe
UT . N . (F_l - Xc ou Xp)/Vn

Se F_l < Xc ou Xp ⇒ o vendedor da "call" (comprador da "put") recebe
UT . N . (F_l - Xc ou Xp)/Vn

Com o intuito de ilustrar a aplicação do critério anterior, retome-se o exemplo nº 3 e admita-se que a instituição de crédito exerce as opções passados dois meses (l = 2) e à cotação 110.00 (F_l). Tal significa que o banco em causa passará a dispor de uma posição curta sobre 21 contratos "futuros" de TDP/LP, com uma cotação inicial de 120.00 e portanto a sua conta-margem apresentará um saldo de

|10.000 contos x 21 x (110 - 120)/100| = 21.000 contos.

Mais ainda, caso a instituição de crédito compre, nessa mesma data (e portanto à cotação de 110.00), 21 contratos "futuros", então ela anulará a sua posição sobre o mercado de futuros e portanto receberá o saldo da sua conta-margem (21.000 contos).

ii) <u>exercício na data de vencimento da opção</u>

Apesar de o exercício de uma opção sobre futuros resultar numa posição sobre o mercado destes últimos produtos financeiros, como a data de vencimento da opção coincide com a maturidade do futuro subjacente então, há que proceder não só ao apuramento do resultado do futuro mas também à sua liquidação bem como à liquidação física de cada contrato.

ii1) liquidação do resultado do futuro

Quando uma opção sobre futuros de TDP/LP é exercida na sua maturidade, então o resultado global do futuro é apurado de acordo com a seguinte fórmula

UT . N . (F_T - Xc ou Xp)/Vn (6)

em que,

T ≡ data de vencimento da opção (T > l);
F_T ≡ cotação do futuro no momento "T";

[24]Atendendo a este critério, torna-se evidente que o exercício de uma "call" é atractivo, para o seu comprador desde que F_l > Xc. Pelo contrário, o comprador de uma "put" tenderá a exercê-la quando F_l < Xp.

$Xc \equiv$ preço de exercício de uma opção de compra;
$Xp \equiv$ preço de exercício de uma opção de venda,

sendo liquidado em consonância com o critério abaixo exposto:

Se $F_T > Xc$ ou $Xp \Rightarrow$ o comprador da "call" (vendedor da "put") recebe $UT \cdot N \cdot (F_T - Xc \text{ ou } Xp)/Vn$

Se $F_T < Xc$ ou $Xp \Rightarrow$ o vendedor da "call" (comprador da "put") recebe $UT \cdot N \cdot (F_T - Xc \text{ ou } Xp)/Vn$

ii2) liquidação fisica dos contratos

Por outro lado, o vendedor do futuro (ou seja, o vendedor da "call" ou o comprador da "put") tem de entregar ao comprador do futuro (comprador da "call" ou vendedor da "put") um número de TDP/LP de liquidação, de entre os constantes na listagem publicada pela bolsa, tal que o valor nominal desse conjunto de obrigações (n° de títulos de liquidação x valor nominal desses títulos) seja igual ao valor nominal do conjunto de contratos (UT . N). Portanto, o número de TDP/LP de liquidação a entregar pelo vendedor do futuro deverá ser igual a

$$(UT \cdot N)/Vn(L) \tag{7}$$

sendo,

$Vn(L) \equiv$ valor nominal de cada TDP/LP de liquidação.

Em contrapartida, o comprador do futuro irá pagar cada obrigação de liquidação, entregue pelo vendedor do futuro, à cotação da data de vencimento (F_T) corrigida pelo factor de conversão associado a esses mesmos títulos (havendo ainda que considerar eventuais juros vencidos pelos títulos de liquidação), ou seja, terá de desembolsar o montante

$$\frac{UT \cdot N}{Vn(L)} \times \frac{F_T}{Vn} \times Vn(L) + J \tag{8}$$

sendo,

$Fc \equiv$ factor de conversão do TDP/LP de liquidação utilizado; e
$J \equiv$ juros vencidos.

Voltando novamente ao exemplo n° 3, admita-se agora que a instituição de crédito opta por exercer as opções na sua data de vencimento (decorridos três meses, por hipótese), mediante a entrega de obrigações do Estado com um cupão semestral à taxa anual de 14% e com um valor nominal de 2.000$00. Considere-se ainda que as obrigações de liquidação utilizadas pelo banco possuem um factor de conversão igual a 1.05, que a cotação dos futuros, na sua maturidade, é de 105 e que as opções foram adquiridas dois meses após o vencimento do último cupão das obrigações de liquidação.

Caso tal aconteça, a instituição de crédito irá, na data de vencimento dos contratos, receber (pois, 105 < 120) um valor de

$$|10.000 \text{ contos} \times 21 \text{ contratos} \times (105 - 120) / 100| = 31.500 \text{ contos}$$

e terá de entregar ao comprador dos futuros (vendedor das "put options") um número de obrigações de liquidação igual a

(10.000 contos x 21 contratos) / 2 contos = 105.000 TDP/LP de liquidação[25].

Em troca das 105.000 obrigações entregues, o banco deverá receber[26]

$$\frac{10.000 \text{ contos} \times 21 \text{ contratos}}{2 \text{ contos}} \times 105/100 \times 1.05 \times 2 \text{ contos} +$$

$$+\ 105.000 \text{ obrigações} \times 2 \text{ contos} \times 14\% \times (2 \text{ meses} + 3 \text{ meses}) / 12 \text{ meses} =$$

$$= 231.525 \text{ contos} + 12.250 \text{ contos} = 243.775 \text{ contos.}$$

[25]Deste modo, o valor nominal do conjunto de TDP/LP de liquidação (105.000 obrigações x 2 contos) coincide com o valor nominal dos contratos (10.000 contos x 21 contratos).

[26]No fundo, o banco recebe 2.205$00 (105/100 x 1.05 x 2.000$00) por cada uma das 105.000 obrigações bem como os juros referentes a 5 meses do próximo cupão semestral.

2. O VALOR DE UMA OPÇÃO: DETERMINANTES E RELAÇÕES DE ARBITRAGEM.

O objectivo desta parte do presente trabalho consiste em definir os parâmetros e as relações de arbitragem que condicionam a evolução do valor de uma opção. Isto porque, por um lado, a formulação de estratégias de gestão de carteiras de obrigações através da utilização de opções sobre TDP/LP requer muitas vezes o conhecimento de tais parâmetros. Por outro lado, porque a definição de modelos de valorização de opções (imprescindíveis para a determinação dos parâmetros anteriormente referidos) baseia-se na utilização das relações de arbitragem desenvolvidas neste quesito do trabalho.

Ao longo da exposição, por uma questão de simplicidade, trabalhar-se-á em termos unitários, ou seja, considerar-se-ão opções (teóricas) sobre uma unidade do activo (ou contrato futuro) subjacente.

2.1. O *valor intrínseco* e o *valor tempo*

O valor de uma opção pode ser analisado como consistindo na soma de duas componentes:

VALOR DA OPÇÃO = VALOR INTRÍNSECO + VALOR TEMPO (9)

Quanto ao designado *valor intrínseco*, ele corresponde ao valor de exercício da opção, ou seja, ao lucro obtido pelo comprador do contrato através do seu exercício[27].

No caso de uma opção de compra ("europeia" ou americana"), o seu valor intrínseco é dado por:

- opções "on the spot": $$c(VI) = \max [\, 0, S - X \,] \qquad (10)$$

- opções sobre futuros: $$c(VI) = \max [\, 0, F - X \,] \qquad (11)$$

sendo,

$c(VI) \equiv$ valor intrínseco da "call";
$X \equiv$ preço de exercício da opção;
$S \equiv$ cotação do activo subjacente à opção; e
$F \equiv$ cotação do futuro subjacente à opção.

---

[27] Lucro efectivo, no caso de uma "opção americana" e lucro potencial, no caso de uma "opção europeia" antes da sua data de vencimento.

As fórmulas (10) e (11) podem ser facilmente justificadas tendo em conta a política óptima de exercício a adoptar por parte do comprador de uma opção de compra. Assim, se a opção estiver "out-of-the-money" ou "at-the-money" (S ou F $\leq$ X) então o seu detentor não a irá exercer, pelo que o valor intrínseco da "call" é igual a zero. Pelo contrário, se a "call" estiver "in-the-money" (S ou F $>$ X) então o seu possuidor lucrará, com o seu exercício, a diferença entre a cotação do activo ou futuro subjacente e o preço de exercício, já que irá adquirir por "X" algo pelo qual poderá obter, no mercado, um valor "S" ou "F".

Tratando-se de uma opção de venda ("europeia" ou "americana"), as fórmulas (10) e (11) transformam-se em:

- opções "on the spot": $\mathbf{p(VI) = max\ [\ 0, X - S\ ]}$ (12)

- opções sobre futuros: $\mathbf{p(VI) = max\ [\ 0, X - F\ ]}$ (13)

sendo,

p(VI) $\equiv$ valor intrínseco da "put".

Isto porque, se a opção estiver "out-of-the-money" ou "at-the-money" (S ou F $\geq$ X), o seu comprador não a exercerá e portanto o valor intrínseco da "put" será nulo. Caso contrário (S ou F $<$ X), a opção será exercida permitindo obter um valor de "X" para um activo que o mercado apenas valoriza a "S" ou "F", ou seja, possibilitando a contabilização de um lucro de "X-S" ou "X-F".

Os gráficos V e VI sintetizam as conclusões anteriores:

Gráfico V

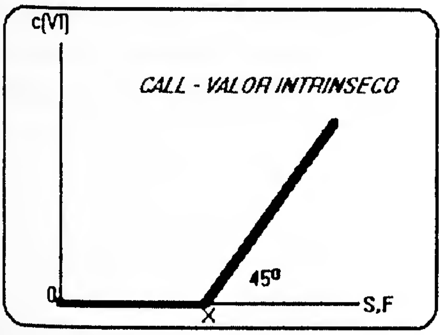
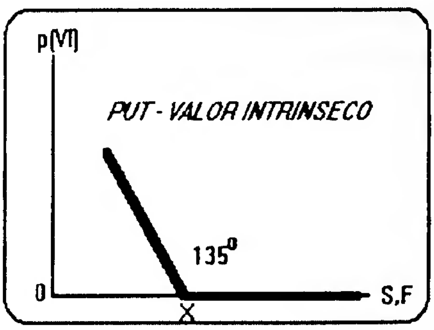


Gráfico VI



Relativamente ao *valor tempo*, este é dado pela diferença, não negativa[28], entre o valor da opção e o seu valor intrínseco:

- opções de compra: $\mathbf{c(VT) = c - c(VI)}$ (14)

- opções de venda: $\mathbf{p(VT) = p - p(VI)}$ (15)

sendo,

c ≡ valor de uma "call";
c(VT) ≡ valor tempo de uma "call";
p ≡ valor de uma "put"; e
p(VT) ≡ valor tempo de uma "put".

Esta componente do valor de uma opção resulta da probabilidade atribuída à ocorrência de uma evolução favorável[29] ao nível do preço do activo subjacente ("S" ou "F"), até ao termo da vida do contrato. Ou seja, o *valor tempo* de uma opção traduz o valor atribuído à probabilidade de, no decurso da vigência do contrato, a opção passar de uma situação "out-of-the-money" para uma posição "in-the-money" ou de esta última se acentuar. Concretizando, c(VT) traduz o valor atribuído à probabilidade de "S"/"F" ultrapassar "X" ou de "S"/"F" aumentar durante a vida da "call", enquanto que p(VT) valoriza a probabilidade de "S"/"F" tornar-se inferior a "X" ou de "S"/"F" declinar durante o tempo em falta até à maturidade da "put".

O conceito de *valor tempo* de uma opção pode ser facilmente ilustrado retomando o exemplo n°1 e assumindo que a cotação das obrigações, no mercado spot, é de 2.096$00. De facto, sabendo-se que o valor de mercado da opção de venda é de 10$00 e que o seu *valor intrínseco* corresponde a 4$00 (2.100$00 - 2.096$00), então o seu *valor tempo* ascende a 6$00 (10$00 - 4$00). Neste caso, esta última componente do prémio da "put" (6$00) equivale ao valor atribuído à probabilidade de a cotação das obrigações em mercado spot tornar-se inferior a 2.096$00.

Os gráficos VII e VIII permitem visualizar a evolução do *valor tempo* de uma opção em função da cotação assumida pelo activo subjacente, ilustrando também a representação gráfica da curva do prémio da opção:

---

[28]Pois, o *valor tempo* de uma opção é sempre superior ou igual a zero, excepção feita a opções de compra "europeias" sobre TDP/LP que gerem um elevado volume de fluxos financeiros durante a vida do contrato, a opções de venda "europeias" sobre TDP/LP que não libertem cupões (até ao momento "T") e que estejam "deep in-the-money" e a opções de compra "europeias" sobre futuros de TDP/LP que estejam "deep-in-the-money". Estas excepções serão objecto de análise nos quesitos 2.4.1.2., 2.4.2.1., e 2.4.1.3., respectivamente.

[29] Sob o prisma do comprador da opção.

Gráfico VII

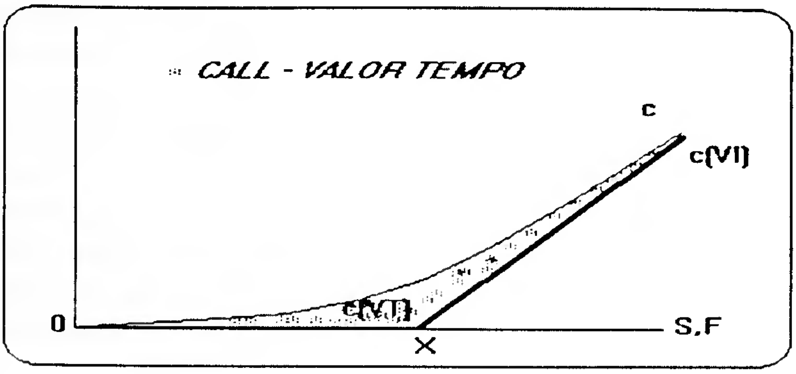
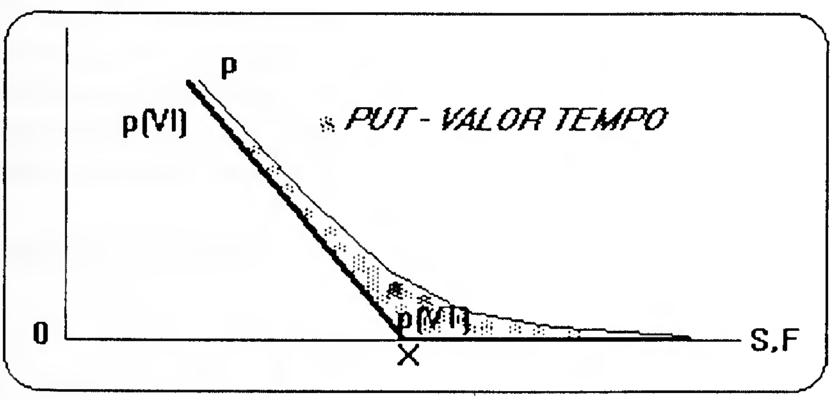


Gráfico VIII



Em ambos os gráficos é visível que o *valor tempo* de uma opção é máximo quando existe uma situação "at-the-money" (S ou F = X) e é tanto menor quanto mais a opção estiver "out-of-the-money" ou "in-the-money". Tal acontece, pois quanto mais uma opção estiver "out-of-the-money" ou "in-the-money", menor será a probabilidade de ocorrência de uma evolução favorável ao nível do preço do activo (ou contrato futuro) subjacente.

Por outro lado, como o valor de uma opção corresponde à soma dos seus valores *intrínseco* e *tempo*, então é natural que a curva representativa do seu valor tenha uma inclinação positiva, no caso de uma "call", ou uma inclinação negativa, tratando-se de uma "put", sendo a sua concavidade, em ambos os casos, "voltada para cima" (curvas convexas). No caso de uma opção de compra, para o intervalo de valores S,F < X, a curva do seu preço (c) tem uma inclinação positiva e é convexa devido ao facto de o seu *valor* *tempo* ser crescente com o preço do activo (ou do contrato futuro) subjacente[30]. Para "S" ou "F" superiores a "X", a inclinação positiva da curva resulta do facto de o *valor intrínseco* da opção crescer com o preço do activo/contrato subjacente e a sua convexidade é justificada tendo em conta que o *valor tempo* da "call" varia inversamente com "S" ou "F"[31] . Por seu turno, tratando-se de uma opção de venda e para valores de "S" ou "F" inferiores a "X", a inclinação negativa associada à curva representativa do preço da "put" deriva do facto de o seu *valor intrínseco* decrescer com "S" ou "F", enquanto que a convexidade da função preço é explicada pela existência de um *valor tempo* crescente[32]. Para valores de "S" ou "F" acima de "X", a curva do preço da opção de venda mantém-se convexa e com inclinação negativa, mas desta feita em virtude da existência de um *valor tempo* decrescente em "S" ou "F"[33].

Enquanto que o *valor intrínseco* de uma opção permanece constante durante toda a maturidade do contrato, para cada nível de "S" ou "F", já o *valor tempo* decresce à medida que a opção (de compra ou de venda) se aproxima da sua data de vencimento. Isto porque, quanto menor for o tempo em falta para a maturidade da opção, tanto menor será também a probabilidade de ocorrência de uma evolução favorável ao nível do parâmetro "S" ou "F". Graficamente, tal significa que, durante a vigência do contrato, a curva representativa do preço de uma opção tende para o diagrama associado ao seu *valor intrínseco*, coincidindo com este último na maturidade da opção. Ou seja, na data de vencimento de uma opção, o seu *valor tempo* é nulo, donde o seu preço é dado pelo respectivo *valor intrínseco*[34] :

- opções "on the spot"

$$. \ \mathbf{c_T} = \begin{cases} \mathbf{S_T - X} & \Leftarrow \mathbf{S_T > X} \\ \mathbf{0} & \Leftarrow \mathbf{S_T \leq X} \end{cases} = \mathbf{max}\left[\mathbf{0, S_T - X}\right] \qquad (16)$$

$$. \ \mathbf{p_T} = \begin{cases} \mathbf{X - S_T} & \Leftarrow \mathbf{S_T < X} \\ \mathbf{0} & \Leftarrow \mathbf{S_T \geq X} \end{cases} = \mathbf{max}\left[\mathbf{0, X - S_T}\right] \qquad (17)$$

---

[30] Pois, quanto maior for "S" ou "F", tanto menos a opção estará "out-of-the-money", e portanto maior será a probabilidade de o contrato passar para uma situação "in-the-money".

[31] Na verdade, à medida que "S" ou "F" aumenta, a "call" fica cada vez mais "in-the-money", reduzindo-se assim a probabilidade de ocorrência de uma evolução favorável ao nível de "S" ou "F".

[32] Isto porque, quanto maior for "S" ou "F", tanto menos a opção estará "in-the-money", sendo consequentemente maior a probabilidade de "S" ou "F" descer.

[33] Neste caso, porque à medida que "S" ou "F" aumenta, a opção torna-se também cada vez mais "out-of-the-money" e portanto diminui a probabilidade de a "put" passar a estar "in-the-money".

[34] Esta observação é pertinente, dado que, conforme mais adiante será demonstrado, o preço de uma opção corresponde ao valor actual do seu *valor intrínseco* na maturidade, ponderado, obviamente, pela probabilidade de o contrato terminar a sua duração numa situação "in-the-money".

sendo,

$c_T \equiv$ valor de uma opção de compra "on the spot" ("europeia" ou "americana"), na sua data de vencimento;

$p_T \equiv$ valor de uma opção de venda "on the spot" ("europeia" ou "americana"), na sua data de vencimento;

$S_T \equiv$ cotação do activo subjacente, na maturidade da opção;

$T \equiv$ data de vencimento da opção.

- opções sobre futuros

$$. \; c_T = \begin{cases} F_T - X & \Leftarrow F_T > X \\ 0 & \Leftarrow F_T \leq X \end{cases} = \max\left[0, F_T - X\right] \tag{18}$$

$$. \; p_T = \begin{cases} X - F_T & \Leftarrow F_T < X \\ 0 & \Leftarrow F_T \geq X \end{cases} = \max\left[0, X - F_T\right] \tag{19}$$

sendo,

$c_T \equiv$ valor de uma opção de compra sobre futuros ("europeia" ou "americana"), na sua data de vencimento;

$p_T \equiv$ valor de uma opção de venda sobre futuros ("europeia" ou "americana"), na sua data de vencimento;

$F_T \equiv$ cotação do contrato futuro subjacente, na maturidade da opção;

$T \equiv$ data de vencimento da opção.

As quatro fórmulas anteriores, apesar de intuitivas, podem ser formalmente demonstradas. Assim, quando qualquer uma das opções anteriores termina "out-of-the-money", então não será levado a cabo o seu exercício e portanto o valor do contrato será nulo. Caso contrário, isto é, se a opção terminar "in-the-money", a não existência de oportunidades de arbitragem implica a verificação das quatro equações:

- opções "on the spot"

. opção de compra ($S_T > X$)

ESTRATÉGIAS DE ARBITRAGEM

SE $c_T > S_T - X$	cash flow	SE $c_T < S_T - X$	cash flow
Long asset	$- S_T$	Long call	$- c_T$
Short call	$+ c_T$	Obtenção do activo	$- X$
Entrega do activo	$+ X$	Short asset	$+ S_T$
$\pi =$	$- S_T + c_T + X > 0$	$\pi =$	$- c_T - X + S_T > 0$

O diagrama anterior mostra que caso o preço, na maturidade, de uma opção de compra "in-the-money" ($S_T > X$) não coincidisse com o seu *valor intrínseco* ($S_T - X$), então seria sempre possível desencadear uma estratégia conducente à obtenção de um lucro sem risco ($\pi > 0$). De facto, se a desigualdade $c_T > S_T - X$ ocorresse, bastaria adquirir o activo subjacente ("long asset") e vender uma opção de compra ("short call") para obter um lucro sem risco. Isto porque, por um lado, a opção de compra é exercida pelo seu comprador (visto encontrar-se "in-the-money"), sendo assim necessário entregar o activo subjacente contra o recebimento de apenas o preço de exercício. No entanto, a perda associada à entrega do activo por um valor ("X") inferior ao seu custo ("S_T") é mais do que compensada pelo recebimento do prémio da "call". Já na hipótese contrária ($c_T < S_T - X$), a estratégia de arbitragem consistiria em comprar uma opção de compra ("long call"), procedendo-se de imediato ao seu exercício, e simultaneamente vender o activo subjacente ("short asset"). Mediante o exercício da "call", e consequente pagamento do seu preço de exercício, obtém-se um activo subjacente, o qual será então vendido a um preço superior (pois, $S_T > X$) mais do que compensando o prémio pago pela "call".

Ora, num mercado eficiente a prossecução de tais estratégias de arbitragem impulsionará o prémio da "call" para o seu nível de equilíbrio na maturidade (ou seja, para o seu *valor intrínseco*).

. opção de venda ($S_T < X$)

<u>ESTRATÉGIAS DE ARBITRAGEM</u>

SE $p_T < X - S_T$	cash flow	SE $p_T > X - S_T$	cash flow
Long asset	$- S_T$	Short put	$+ p_T$
Long put	$- p_T$	Obtenção do activo	$- X$
Entrega do activo	$+ X$	Short asset	$+ S_T$
$\pi =$	$- S_T - p_T + X > 0$	$\pi =$	$+ p_T - X + S_T > 0$

Tratando-se de uma opção de venda, para a qual $S_T < X$, uma situação caracterizada pela verificação da inequação $p_T < X - S_T$ tenderá a ser eliminada, visto ser possível realizar a seguinte estratégia de arbitragem: compra de uma opção de venda e execução do seu exercício mediante a compra, simultânea, do activo subjacente, daqui resultando um lucro sem risco, dado que a diferença positiva entre o preço de exercício obtido para o activo e o seu custo ($X - S_T$) é superior ao prémio pago pela "put". Por outro lado, uma situação em que $p_T > X - S_T$ também será insustentável, uma vez que a venda de uma "put" e concomitante venda do activo subjacente recebido através do exercício da opção (realizado pelo seu comprador, em virtude de o contrato estar "in-the-money"), permite obter um prémio superior à perda associada à alienação do activo por um preço ("S_T") inferior ao preço de exercício despendido.

- opções sobre futuros

Demonstrada a veracidade das equações (16) e (17) ficam imediatamente provadas as equações (18) e (19), na medida em que, por força do fenómeno de arbitragem descrito no quesito 1.3.2.1, a cotação do futuro[35]converge para o preço do activo subjacente na maturidade do contrato futuro (e portanto, na data de vencimento da opção), isto é, $F_T = S_T$.

[35]Corrigida pelo respectivo factor de conversão, no caso dos futuros sobre TDP/LP.

2.2. Variáveis explicativas do valor de uma opção

As principais variáveis explicativas do valor de uma opção, presentes em qualquer modelo de avaliação, são:

i) Preço do activo ou contrato "futuro" subjacente $\equiv$ S ou F

O valor de uma opção de compra varia directamente com a cotação do activo/futuro subjacente, ou seja,

$$dc/dS > 0 \quad e \quad dc/dF > 0$$

Pelo contrário, o valor de uma opção de venda diminui à medida que a cotação do activo/futuro subjacente aumenta, isto é

$$dp/dS < 0 \quad e \quad dp/dF < 0$$

A justificação de tal comportamento radica nas razões apontadas, no quesito anterior, para explicar a inclinação das curvas representativas do valor da respectiva opção.

ii) Preço de exercício $\equiv$ X

A influência do preço de exercício sobre o valor de uma opção é exactamente oposta ao efeito exercido pela cotação do activo/futuro subjacente:

$$dc/dX < 0 \quad e \quad dp/dX > 0$$

No caso de uma opção de compra, quanto maior o preço de exercício tanto menor será o seu valor, pois menor virá o *valor intrínseco* de uma "call" "in-the-money" ou o *valor tempo* de uma "call" "out-of-the-money" (visto ser mais difícil a cotação do activo/futuro subjacente vir a ultrapassar "X").

Tratando-se de uma opção de venda, quanto maior for o preço de exercício tanto maior será também o valor da opção, uma vez que maior virá o *valor intrínseco* de uma "put" "in-the-money" ou o *valor tempo* de uma "put" "out-of-the-money" (dado ser mais provável que a cotação do activo/futuro subjacente desça para um nível inferior a "X").

iii) Maturidade (data de vencimento) da opção ≡ T

Quanto maior for a maturidade de uma opção, maior será a probabilidade de ocorrer uma evolução favorável ao nível do preço do activo/futuro subjacente (isto é, maior será o seu *valor tempo*) e portanto maior deverá ser o seu prémio:

$$dc/dT > 0 \quad e \quad dp/dT > 0$$

Isto porque, apesar de o incremento de "T" também aumentar a probabilidade de ocorrência de movimentos desfavoráveis ao nível de "S" ou "F", como uma opção é um contrato assimétrico (no sentido em que o seu comprador pode não ser afectado por tais movimentos, mediante o não exercício da opção), então tal probabilidade é irrelevante para a determinação do valor da opção.

Todavia, o sinal das derivadas dc/dT e dp/dT apenas é válido para opções de compra ("europeias" ou "americanas") e para opções de venda "americanas". Para opções de venda "europeias" o sinal da derivada dp/dT é indeterminado pois, não obstante um maior valor de "T" tornar mais plausível a ocorrência de uma descida de "S" ou "F", uma maior maturidade da opção também reduz o valor actual do preço de exercício eventualmente recebido na data de vencimento da "put". Isto é, quanto mais tempo faltar para a maturidade da opção, mais atractiva pode ser a venda imediata do activo e subsequente aplicação do produto da venda, face à estratégia de aquisição do activo via exercício da opção (somente na data de vencimento do contrato).

iv) Volatilidade da cotação do activo/futuro subjacente ≡ σ[36]

Tanto o valor das opções de compra ("europeias" ou "americanas") como o valor das opções de venda ("europeias" ou "americanas") são funções crescentes do nível de volatilidade do preço do activo/futuro subjacente:

$$dc/d\sigma > 0 \quad e \quad dp/d\sigma > 0$$

Tal acontece na medida em que uma maior variabilidade de "S" ou "F" torna mais provável a verificação de uma evolução favorável dessas mesmas variáveis, o que se irá traduzir num maior *valor tempo* das opções[37].

[36] Trata-se agora de uma variável não observável, representando "σ" o desvio-padrão anual da taxa de rendimento do activo/futuro subjacente. A forma de estimação desta variável será objecto de análise aquando da abordagem dos modelos de avaliação de opções.

[37] Mais uma vez, a assimetria deste tipo de contrato permite desprezar o impacto das variações desfavoráveis de "S" ou "F".

v) Taxa de juro sem risco $\equiv r$[38]

A influência das taxas de juro sobre o tipo de opções em análise -opções sobre obrigações- exerce-se por duas vias distintas e antagónicas: em primeiro lugar (e tal como acontece com os restantes tipos de opções), porque pode existir um desfasamento temporal entre a aquisição e o exercício (liquidação do preço de exercício) da opção; por último, pois as variações da taxa de juro afectam, em sentido inverso, a cotação do activo/futuro subjacente ($dS/dr < 0$ e $dF/dr < 0$).

Tratando-se de opções "americanas", o comportamento do seu valor em função da evolução de "r" parece ser o simétrico da influência exercida pela cotação do activo/futuro subjacente :

$$dc/dr < 0 \quad e \quad dp/dr > 0$$

Com efeito, quanto mais altas estiverem as taxas de juro, menor será a cotação do activo/futuro e consequentemente (pois, $dc/dS,F > 0$ e $dp/dS,F < 0$) mais baixo (mais alto) será o valor de uma opção de compra (venda).

Contudo e no que concerne essencialmente às opções "europeias", verifica-se também a existência de uma influência de sinal contrário, tornando indeterminado o efeito final de uma variação de "r" sobre o valor de uma opção. De facto, uma elevação das taxas de juro faz baixar o valor actual do preço de exercício eventualmente liquidado (pago pelo detentor de uma "call" e recebido pelo possuidor de uma "put") na data de vencimento da opção e portanto tende a elevar o valor da opção de compra ($dc/dr > 0$) e a reduzir o valor da opção de venda ($dp/dr < 0$).

[38] A restrição do impacto das taxas de juro sobre o valor de uma opção ao efeito associado a uma "taxa de juro sem risco" é resultado do facto de se provar que o valor de uma opção em nada depende do perfil de risco do investidor. Esta proposição, designada por "argumento de neutralidade face ao risco", foi inicialmente explicitada por Cox & Ross (1976) e será formalmente deduzida no ponto 3.1.3.

2.3. Parâmetros das opções

Os denominados "parâmetros" de uma opção não são mais do que medidas instantâneas da sensibilidade do valor da opção face a variações infinitesimais das suas variáveis explicativas. O seu interesse reside essencialmente no facto de a eficácia das estratégias de utilização de opções ao nível da gestão de carteiras de obrigações, depender muitas vezes da exactidão colocada ao nível da estimação dos seus valores.

No entanto, convém, desde já, ter presente duas grandes limitações associadas à utilização de tais parâmetros. Em primeiro lugar, tratam-se de medidas de sensibilidade *instantâneas*, no sentido em que quantificam o impacto produzido sobre o valor da opção por variações *infinitesimais* das suas variáveis explicativas, quando, na verdade, estas variações são discretas (podendo mesmo atingir magnitudes significativas). Por outro lado, cada parâmetro irá medir o impacto isolado de uma determinada variável explicativa sobre o valor da opção, quando, na realidade, as diversas variáveis explicativas variam simultaneamente.

2.3.1. Delta (Δ)

O parâmetro delta de uma opção traduz a variação do valor da opção induzida por uma variação unitária do preço do activo subjacente, ceteris paribus. Graficamente, este parâmetro corresponde à inclinação, num dado ponto, da curva representativa do valor da opção e, algebricamente, é dado pela primeira derivada do valor da opção em ordem ao preço do activo/futuro subjacente:

$$\Delta_c = dc/dS \quad \text{ou} \quad dc/dF \tag{20}$$

$$\Delta_p = dp/dS \quad \text{ou} \quad dp/dF \tag{21}$$

sendo,

$\Delta_c \equiv$ delta de uma opção de compra ("europeia" ou "americana"); e
$\Delta_p \equiv$ delta de uma opção de venda ("europeia" ou "americana").

Tendo em conta que $dc/dS,F > 0$ e que $dp/dS,F < 0$ então, na óptica do comprador do contrato,

$$\Delta_c > 0 \quad \text{e} \quad \Delta_p < 0$$

Para o vendedor da opção, o sinal do respectivo parâmetro delta é exactamente o oposto, visto que -conforme referido aquando da análise dos perfis de lucro- as duas posições do contrato (comprador e vendedor) são simétricas.

Gráfico IX

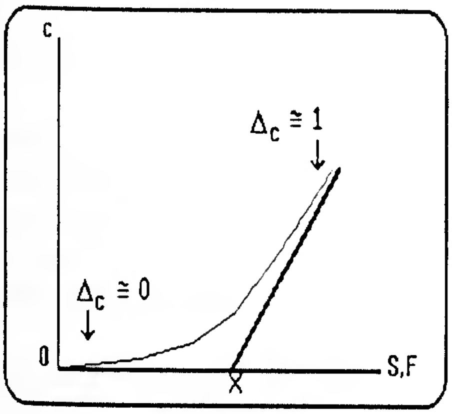
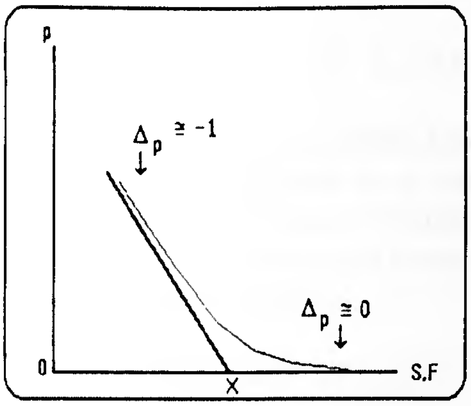


Gráfico X



No que concerne ao intervalo de valores admissível para estes parâmetros, os gráficos IX e X mostram que $\Delta_c \in [0, 1]$ e $\Delta_p \in [-1, 0]$, sendo os parâmetros *delta*, em módulo, tanto maiores quanto mais a opção estiver "in-the-money" (e tanto menores quanto mais a opção estiver "out-of-the-money"). Com efeito, quanto mais uma opção estiver "in-the-money", tanto mais o valor da opção será constituído pelo seu *valor intrínseco* (pois, menor será o seu *valor tempo*) e portanto tanto mais o valor da opção evidenciará uma variação de "um para um" com a cotação do activo/futuro subjacente (ou seja, tanto mais sensível será o valor da opção face a variações de "S" ou "F"). Em oposição, quanto mais uma opção estiver "out-of-the-money" -situação na qual o valor da opção é apenas dado pelo seu *valor tempo*- menor será o impacto de uma variação do preço do activo/futuro subjacente sobre a probabilidade de o contrato passar a estar "in-the-money" e consequentemente menor será a variação induzida sobre o valor da opção.

O parâmetro delta é também designado por "rácio de cobertura", dado que a sua correcta utilização permite constituir carteiras de opções e de activos/futuros subjacentes "imunizadas" face a (pequenas) variações do preço do activo/futuro subjacente. Isto é, as carteiras

SHORT/LONG ASSET
$1/\Delta_c$ LONG/SHORT CALL[39]

e

LONG/SHORT ASSET
$-1/\Delta_p$ LONG/SHORT PUT[40]

geram uma taxa de rentabilidade idêntica à taxa de juro sem risco, para pequenas variações de "S" ou "F", sendo portanto consideradas carteiras sem risco. Com efeito, é possível verificar, de forma intuitiva, que o valor de tais carteiras permanece constante face a pequenas variações do preço do activo/futuro subjacente. Designando por ΔS (ou

[39] Compra (venda) de $1/\Delta_c$ "calls" por cada activo/futuro vendido (comprado)
[40] Compra (venda) de $(-1/\Delta_p)$ "puts" por cada activo/futuro comprado (vendido), visto $dp/dS,F < 0$

ΔF) uma pequena[41] variação da cotação do activo/futuro subjacente, a variação daí decorrente para o valor de cada uma das quatro carteiras definidas anteriormente é dada por:

- Short asset $\wedge$ $1/\Delta_c$ Long call: $+1 \,.\, (-\Delta S \text{ ou } -\Delta F) + 1/\Delta_c \,.\, [\Delta S \text{ ou } \Delta F \,.\, \Delta_c] = 0$

em que, a primeira parcela representa a variação do valor da carteira associado à posição "curta" detida sobre um activo/futuro (o sinal menos resulta do facto de o valor da posição variar inversamente com "S" ou "F") e a segunda parcela traduz a variação do valor da posição "longa" detida sobre $1/\Delta_c$ opções (a qual é dada, para cada opção, pelo produto entre a variação da cotação do activo/futuro e o "delta" da opção).

- Long asset $\wedge$ $1/\Delta_c$ Short call[42] : $+1 \,.\, \Delta S \text{ ou } \Delta F + 1/\Delta_c \,.\, [\Delta S \text{ ou } \Delta F \,.\, (-\Delta_c)] = 0$

onde, a variação da posição sobre o activo/futuro não vem afectada do sinal menos (pois, sendo "longa", varia directamente com "S" ou "F") e a variação do valor de cada opção é dada pelo produto entre a variação da cotação do activo/futuro subjacente e o simétrico do *delta* de uma "call" (uma vez que as opções são vendidas).

- Long asset $\wedge$ $1/\Delta_p$ Long put: $+1 \,.\, \Delta S \text{ ou } \Delta F + (-1/\Delta_p) \,.\, [\Delta S \text{ ou } \Delta F \,.\, \Delta_p] = 0$

correspondendo o número de opções transaccionadas a $(-1/\Delta_p)$, visto que $dp/dS,F < 0$.

- Short asset $\wedge$ $1/\Delta_p$ Short put[43] : $+1 \,.\, (-\Delta S \text{ ou } -\Delta F) + (-1/\Delta_p) \,.\, [\Delta S \text{ ou } \Delta F \,.\, (-\Delta_p)] = 0$

em que, a variação do valor da carteira associada à posição "curta" detida sobre $(-1/\Delta_p)$ "puts" é calculada com o simétrico do *delta* de uma "put", na medida em que as opções são vendidas

Em suma, face a variações infinitesimais de "S" ou "F" o valor de qualquer uma das quatro carteiras não se altera (variação nula do valor da carteira), visto que as perdas ou os ganhos registados pelas posições sobre opções são exactamente compensadas pelos ganhos ou perdas associados às posições sobre o activo/futuro subjacente.

Este tipo de estratégias de cobertura é comummente designado por **"delta hedging"** e consiste na definição de uma carteira de opções e de activos/futuros subjacentes cujo parâmetro *delta* seja igual a zero. Na verdade, tendo em conta que:

i) o *delta* de uma carteira -medida da sensibilidade do seu valor face a pequenas variações do preço do activo/futuro subjacente- corresponde à soma algébrica dos parâmetros delta

[41] Ou melhor, uma variação infinitesimal.
[42] Tratando-se de uma "american option" existe ainda o risco de o seu comprador proceder ao exercício antecipado da opção, razão pela qual a "imunização" da carteira pode não estar garantida.
[43] Idem.

de cada um dos seus elementos constituintes (pois, "a derivada da soma è igual à soma das derivadas" e o valor de uma carteira é dado pela soma do valor de cada um dos seus elementos constituintes), isto é,

$$\Delta^c = \sum_i w_i \cdot \Delta_i \tag{22}$$

em que,

$\Delta^c \equiv$ *delta* da carteira;

$\Delta_i \equiv$ *delta* do i-ésimo componente da carteira;

$w_i \equiv$ valor do i-ésimo componente da carteira; e

ii) por outro lado, sabendo-se que o *delta* do activo/futuro subjacente é sempre igual, em módulo a um (com sinal mais para posições "longas" e com sinal negativo para posições "curtas")[44] ,

então verifica-se que:

- Short asset Λ $1/\Delta_c$ Long call: $\Delta^c = 1 \,.\, (-1) + 1/\Delta_c \,.\, \Delta_c = 0$

- Long asset Λ $1/\Delta_c$ Short call: $\Delta^c = 1 \,.\, 1 + 1/\Delta_c \,.\, (-\Delta_c) = 0$

- Long asset Λ $1/\Delta_p$ Long put: $\Delta^c = 1 \,.\, 1 + (-1/\Delta_p) \,.\, \Delta_p = 0$

- Short asset Λ $1/\Delta_p$ Short put: $\Delta^c = 1 \,.\, (-1) + (-1/\Delta_p) \,.\, (-\Delta_p) = 0$

Por seu turno, qualquer uma das quatro carteiras anteriores -carteiras imunizadas face a pequenas variações de "S" ou "F"- recebe a denominação de "**delta neutral**" pois, $\Delta^c = 0$.

Contudo, a prossecução de tais estratégias de cobertura ("delta hedging") pressupõe a execução de um contínuo processo de ajustamento do *delta* da carteira (mediante a compra e venda de opções e de activos/futuros), uma vez que o parâmetro *delta* das opções que integram a carteira varia com as variações processadas ao nível da cotação do activo/futuro subjacente[45] , com a alteração da própria volatilidade de "S" ou "F" e à medida que a data de vencimento dos contratos se aproxima. Relativamente a este último aspecto, os gráficos IX e X permitem observar que à medida que a data de vencimento da opção se aproxima o seu *delta*, em módulo, tende para a unidade (aumenta), caso a opção esteja "in-the-money", e tende para zero (diminui), se a opção estiver "out-of-the-money"[46].

---

[44] Pois, uma variação de "S" ou "F" induz uma alteração idêntica no valor da posição, no mesmo sentido se esta for "longa" ou em sentido contrário caso o activo/futuro tenha sido vendido.

[45] Trata-se do parâmetro *gamma*, a que seguidamente será feito referência.

[46] Isto porque, quanto mais próximo da maturidade da opção, menor o seu *valor tempo* e mais o valor da opção corresponde ao seu *valor intrínseco*.

Mais ainda, a eficácia das estratégias "delta hedging" pode ser afectada pela ocorrência de variações significativas de "S" ou "F" (visto que, o parâmetro *delta* é uma medida de sensibilidade infinitesimal) bem como pela existência de custos de transacção associados ao processo de ajustamento da carteira.

2.3.2. Gamma (Γ)

O parâmetro *gamma* de uma opção mede a sensibilidade do seu *delta* face a variações infinitesimais do preço do activo/futuro subjacente, ceteris paribus. Algebricamente, tal corresponde à primeira derivada do *delta* da opção em ordem à cotação do activo/futuro subjacente ou, tendo em conta as igualdades (20) e (21), à segunda derivada do valor da opção em ordem à cotação do activo/futuro subjacente:

$$\Gamma_c = d\Delta_c/dS \text{ ou } d\Delta_c/dF = d^2c/dS \text{ ou } d^2c/dF \tag{23}$$

$$\Gamma_p = d\Delta_p/dS \text{ ou } d\Delta_p/dF = d^2p/dS \text{ ou } d^2p/dF \tag{24}$$

sendo,

$\Gamma_c \equiv$ parâmetro *gamma* de uma opção de compra; e
$\Gamma_p \equiv$ parâmetro *gamma* de uma opção de venda.

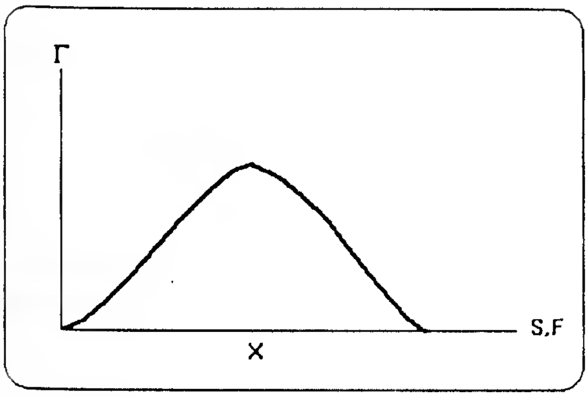
Muitas vezes o parâmetro *gamma* de uma opção é encarado como a medida da convexidade da curva representativa do valor da opção, visto corresponder à segunda derivada de "c" ou "p" em ordem a "S" ou "F". Assim, tendo em consideração que tanto "c" como "p" são representadas por curvas convexas (na óptica do comprador da opção), então

$$\Gamma_c \geq 0 \text{ e } \Gamma_p \geq 0.$$ [47]

Quanto às posições "curtas" sobre opções, o valor do seu gamma é exactamente o simétrico do parâmetro associado à correspondente posição "longa".

[47] O *gamma* só será não positivo (isto é, nulo) na maturidade da opção (pois, o valor da opção coincidirá com o seu *valor intrinseco*) ou então, para opções "deep in-the-money" ou "deep out-of-the-money".

Gráfico XI



Conforme se pode inferir a partir da observação do gráfico XI, o *gamma* de uma opção acentuadamente "in-the-money" ou "out-of-the-money" tende para zero, visto que nessas circunstâncias o valor da opção circunscreve-se ao seu *valor intrínseco* (cujo diagrama representativo apresenta, obviamente, uma convexidade nula). Por outro lado, constata-se também que o parâmetro gamma atinge o seu valor mais alto quando a opção está "at-the-money", dado que o *valor tempo* de uma opção (e portanto a sua convexidade) é máximo quando a cotação do activo/futuro subjacente é igual ao preço de exercício.

O interesse inerente à estimação deste parâmetro reside no facto de o seu valor influenciar o modo de execução e a eficácia associados a uma estratégia "delta hedging". No que diz respeito à execução de tais estratégias, é obvio que a frequência com que é necessário proceder ao ajustamento do *delta* da carteira será tanto maior quanto mais elevado, em valor absoluto, for o *gamma* dessa mesma carteira (na medida em que, maior deverá ser a sensibilidade de Δ^c face a alterações em "S" ou "F"). Por outro lado, a eficácia de uma estratégia "delta hedging" será tanto maior quanto mais baixo (mais próximo de zero), em valor absoluto, for o *gamma* da carteira, pois assim sendo maior será o intervalo de valores de "S" ou "F" para o qual o *delta* da carteira permanecerá nulo.

No fundo, a constituição de uma carteira cujo *delta* seja nulo (carteira "delta neutral") permite a sua imunização face a pequenas variações da cotação do activo/futuro subjacente. Por outro lado, a constituição de uma carteira cujos parâmetros *delta* e *gamma* sejam ambos nulos (carteira "delta/gamma neutral") permite também a sua imunização, mas face a maiores variações do preço do activo/futuro subjacente. Dito de outra forma, a aproximação do *gamma* da carteira a zero (carteira "gamma neutral") torna possível realizar os ajustamentos de uma carteira "delta neutral" com maiores intervalos de tempo, isto é, minora a redução da eficácia de uma estratégia "delta hedging" resultante do facto de o ajustamento da carteira não poder ser efectuado continuamente.

Deste modo, aquando da formulação de estratégias de cobertura é muitas vezes necessário proceder ao cálculo do parâmetro *gamma* da carteira em análise, tendo em conta que:

i) o *gamma* de uma carteira é dado pela soma algébrica dos parâmetros *gamma* de cada um dos seus elementos constituintes[48], isto é,

$$\Gamma^c = \sum_i w_i . \Gamma_i \qquad (25)$$

em que,

$\Gamma^c \equiv$ *gamma* da carteira ($d\Delta^c/dS,F$);

$\Gamma_i \equiv$ *gamma* do i-ésimo componente da carteira;

$w_i \equiv$ valor do i-ésimo componente da carteira; e

ii) o parâmetro *gamma* de uma posição (compradora ou vendedora) sobre o activo/futuro subjacente é sempre igual a zero[49] .

2.3.3. Theta (Θ)

O parâmetro *theta* de uma opção mede a variação induzida sobre o seu valor por uma redução unitária[50] do tempo em falta para a data de vencimento do contrato, ceteris paribus, e pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Theta_c = - dc/d\tau \qquad (26)$$

$$\Theta_p = - dp/d\tau \qquad (27)$$

sendo,

$\Theta_c \equiv$ *theta* de uma opção de compra;

$\Theta_p \equiv$ *theta* de uma opção de venda;

$\tau \equiv$ tempo em falta para a data de vencimento da opção, isto é,

$\tau = T - t$, com

$T \equiv$ data de vencimento da opção; e

$t \equiv$ data de avaliação da opção (momento actual).

Relativamente ao sinal assumido pelos parâmetros *theta* e na perspectiva do comprador da opção[51] , verifica-se que

$$\Theta_c < 0 \quad e \quad \Theta_p{}^{52} < 0,$$

---

[48]Pois, "a derivada da soma é igual à soma das derivadas" e o *delta* da carteira é igual à soma algébrica dos *deltas* de cada elemento componente.

[49] Algebricamente, porque o *delta* de tal posição é igual a 1 ou -1 e a derivada de uma constante é zero; geometricamente, pois a convexidade de uma recta (diagrama representativo de tal posição) é, por definição, inexistente.

[50] Pela passagem de um dia ou de 1/365 do ano, caso o tempo seja medido em anos.

[51] Para o vendedor da opção, os parâmetros são exactamente simétricos.

dado que o *valor tempo* da opção diminui com a aproximação da sua data de vencimento, isto é, à medida que τ tende para zero ($dc/d\tau > 0$ e $dp/d\tau > 0$).

2.3.4. Lambda (Λ)

Por seu turno, o *lambda* de uma opção mede a variação registada pelo seu valor em virtude de uma variação unitária[53] da volatilidade do preço do activo/futuro subjacente, ceteris paribus, ou seja,

$$\Lambda_c = dc/d\sigma \qquad (28)$$

$$\Lambda_p = dp/d\sigma \qquad (29)$$

sendo,

$\Lambda_c \equiv$ *lambda* de uma opção de compra; e
$\Lambda_p \equiv$ *lambda* de uma opção de venda.

Assim sendo, constata-se que o valor de uma opção é tanto mais sensível face a variações da volatilidade de "S" ou "F", quanto maior for o seu *lambda.*

Atendendo à relação -anteriormente descrita- entre o valor de uma opção e "σ", então para os parâmetros *lambda* de posições "longas"[54] observa-se que

$$\Lambda_c > 0 \quad \text{e} \quad \Lambda_p > 0,$$

uma vez que o *valor tempo* de uma opção cresce com "σ".

Acresce ainda que a variação dos parâmetros "Λ_c" e "Λ_p" em função da cotação de activo/futuro subjacente evidencia também a regularidade ilustrada pelo gráfico XI para o *gamma*, ou seja, o parâmetro *lambda* de uma opção é máximo quando S,F = X e tende para zero à medida que o contrato se torna cada vez mais "deep in-the-money" ou "deep out-of-the-money". Isto porque, a influência de "σ" sobre o valor de uma opção exerce-se ao nível do seu *valor tempo* e este último é máximo na primeira situação (opção "at-the-money") e mínimo para valores extremos de "S" ou "F".

---

[52] Tratando-se de uma "put" europeia, Θ_p poderá ser positivo pois, quanto mais próxima estiver a data de vencimento da opção, maior será também o valor actual do preço de exercício eventualmente recebido.

[53] Variação de σ em um ponto percentual.

[54] Uma vez mais, os *lambda* associados a posições "curtas" são exactamente simétricos.

2.3.5. Rho (ρ)

Por fim, designa-se por *rho* o parâmetro que mede a variação induzida sobre o valor de uma opção em resultado de uma variação unitária[55] registada ao nível da taxa de juro sem risco:

$$\rho_c = dc/dr \tag{30}$$

$$\rho_p = dp/dr \tag{31}$$

sendo,

$\rho_c \equiv$ *rho* de uma opção de compra; e

$\rho_p \equiv$ *rho* de uma opção de venda.

Tendo em conta o tipo de contratos em análise -opções sobre obrigações- será difícil determinar o valor deste parâmetro, uma vez que o próprio preço do activo/futuro subjacente é também função da taxa de juro.

[55] Variação de 1%.

2.4. Intervalo de variação do valor de uma opção sobre obrigações

Com base em simples relações de arbitragem é possível determinar limites máximos e mínimos de variação do valor de uma opção sobre obrigações, antes da sua maturidade[56]. Muito embora a gestão de carteiras de obrigações através da utilização de opções financeiras exija o recurso a modelos de avaliação[57], ou seja, o conhecimento do valor de equilíbrio da opção e não apenas de um conjunto de valores admissíveis, a determinação do intervalo de variação do valor das opções sobre obrigações irá permitir retirar ilações acerca das condições e do potencial de exercício antecipado das "opções americanas". Assim, caso se conclua que para um determinado tipo de opções "americanas" sobre TDP/LP não existe qualquer incentivo ao seu exercício antecipado[58] , por parte do seu detentor, então tal significará que o seu valor será idêntico ao de uma opção "europeia" equivalente (em termos de activo subjacente, preço de exercício e maturidade) e portanto a elaboração de um modelo de avaliação do seu valor virá bastante mais simplificada, visto que bastará identificar uma fórmula de avaliação para os contratos de tipo "europeu". Caso contrário, então no ponto n° 3 deste trabalho será necessário deduzir dois modelos de avaliação distintos: um para as opções "europeias" e outro para as suas congéneres "americanas".

Antes de avançar para a definição dos intervalos de variação e como os diferentes tipos de opções sobre obrigações (em termos de activo subjacente e de capacidade de exercício antecipado) não obedecem a iguais relações de arbitragem então, é desde já conveniente distingui-los através das seguintes designações:

$c(S,X,T) \equiv$ valor de uma opção de compra "europeia" sobre TDP/LP;
$C(S,X,T) \equiv$ valor de uma opção de compra "americana" sobre TDP/LP;
$p(S,X,T) \equiv$ valor de uma opção de venda "europeia" sobre TDP/LP;
$P(S,X,T) \equiv$ valor de uma opção de venda "americana" sobre TDP/LP;

$c(F,X,T) \equiv$ valor de uma opção de compra "europeia" sobre futuros de TDP/LP;
$C(F,X,T) \equiv$ valor de uma opção de compra "americana" sobre futuros de TDP/LP;
$p(F,X,T) \equiv$ valor de uma opção de venda "europeia" sobre futuros de TDP/LP; e
$P(F,X,T) \equiv$ valor de uma opção de venda "americana" sobre futuros de TDP/LP;

no momento "t" e com,

---

56 Anteriormente, já foi demonstrado que, na data de vencimento do contrato, o valor de uma opção sobre obrigações corresponde ao seu *valor intrinseco*.
57 Objecto de análise do ponto n° 3 deste trabalho.
58 Exercicio da opção antes da sua data de vencimento.

um preço de exercício de "X", uma data de vencimento "T" e sendo o preço do activo (futuro) subjacente igual a "S[59] " ("F").

2.4.1. Opções de compra

2.4.1.1. Opções "on the spot" sem cupões

Em primeiro lugar, ir-se-á analisar o intervalo de variação do valor de uma opção sobre TDP/LP cuja obrigação subjacente não vença qualquer cupão até à data de vencimento da opção[60].

1) Limite superior de variação

- opções europeias: $\mathbf{c(S,X,T) < S}$ (32)

- opções americanas: $\mathbf{C(S,X,T) < S}$ (33)

A demonstração das duas últimas desigualdades pode ser feita conjuntamente pois, sabendo-se que:

a) o valor de uma posição "longa" sobre o activo subjacente é pelo menos igual ao valor de uma "call" perpétua e com um preço de exercício nulo[61], isto é, que

$$S \geq c(S,0,+\infty) \text{ e } S \geq C(S,0,+\infty); \text{ e que}$$

b) o valor de uma opção de compra varia inversamente com o seu preço de exercício e directamente com a sua maturidade, isto é, que

$$c(S,0,+\infty) > c(S,X,T) \text{ e } C(S,0,+\infty) > C(S,X,T) \text{ para } X > 0 \text{ e } T < +\infty$$

então,

$$S > c(S,X,T) \text{ e } S > C(S,X,T).$$

[59] Trata-se do valor de transacção da obrigação subjacente em mercado spot, isto é, corresponde à soma do valor de cotação com os juros vencidos.

[60] Ou, cujo activo subjacente seja uma "obrigação de cupão zero".

[61] Pois, a detenção do activo nunca pode ser inferior, em valor, ao direito, ilimitado no tempo, de obtenção, sem custo, dessa posse.

2) Limite inferior de variação[62]

- opções europeias: $\mathbf{c(S,X,T) = max\ [0, S - X.e^{-r\tau}]}$ (34)

- opções americanas: $\mathbf{C(S,X,T) = max\ [0, S - X.e^{-r\tau}]}$ (35)

As condições (34) e (35) estipulam que o valor de uma "call" sobre TDP/LP "sem cupões", "europeia" ou "americana", é sempre superior a zero caso $S < X.e^{-r\tau}$, ou superior a $S - X.e^{-r\tau}$ na situação contrária.

Começando pela primeira situação ($S < X.e^{-r\tau}$), o valor de uma opção nunca pode ser negativo, isto é, $c(S,X,T) \geq 0$ e $C(S,X,T) \geq 0$, pois tal significaria que o prémio seria recebido pelo comprador do contrato, o que não faz sentido visto este último ser precisamente a parte a quem a opção (contrato assimétrico) confere um direito. Dito de outro modo, como o comprador da opção pode não a exercer caso esta esteja "out-of-the-money", então a aquisição de tal contrato resultaria sempre num ganho sem risco para o seu comprador na hipótese absurda de o prémio ser por ele recebido.

Se $S \geq X.e^{-r\tau}$, então $c(S,X,T) \geq S - X.e^{-r\tau}$ e $C(S,X,T) \geq S - X.e^{-r\tau}$, pois caso tal não acontecesse seria sempre possível implementar uma estratégia de arbitragem geradora de um ganho sem risco, a qual consistiria na aquisição de uma opção de compra ("long call"), venda de uma obrigação subjacente ("short asset") e compra de uma "obrigação de cupão zero" de valor nominal "X" e maturidade "τ" ("long OCZ"):

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	VALOR ACTUAL	VALOR NA MATURIDADE	
		$Se\ S_T > X$	$Se\ S_T \leq X$
Long call	$-c_t$ ou $-C_t$	$+(S_T - X)$[63]	0[64]
Short asset	$+S_t$	$-S_T$ [65]	$-S_T$ [66]
Long OCZ[67]	$-X.e^{-r\tau}$	$+X.e^{-r\tau}.e^{r(T-t)} = +X$	$+X$
$\pi =$	$-c_t(-C_t)+S_t-X.e^{-r\tau}$	0	$-S_T + X \geq 0$

[62]Ao longo do ponto nº 2 deste trabalho ir-se-á pressupor uma estrutura temporal de taxas de juro "flat" (ou seja, que "r" será constante durante o intervalo de tempo "τ") e utilizar-se-á o regime de capitalização contínua. Isto é, o valor acumulado de uma unidade de capital, à taxa de juro "r" e durante "τ" períodos de tempo será dado por

$e^{r\tau} = \lim (1 + r/m)^{m\tau}$, quando "m" (período de capitalização) tende para infinito.

[63] Na maturidade, o valor de uma opção corresponde ao seu valor intrínseco.

[64] Idem.

[65]Valor que poderia ser obtido através da alienação da obrigação subjacente, caso esta não tivesse sido vendida no momento "t".

[66]Idem.

[67]Equivale à realização de uma aplicação financeira.

De facto, como a execução da estratégia descrita permite a obtenção de um valor não negativo para a carteira de arbitragem na maturidade da opção ($\pi_T \geq 0$), então para que não existam oportunidades de realização de lucros sem risco é necessário que o valor actual da carteira seja não positivo, isto é,

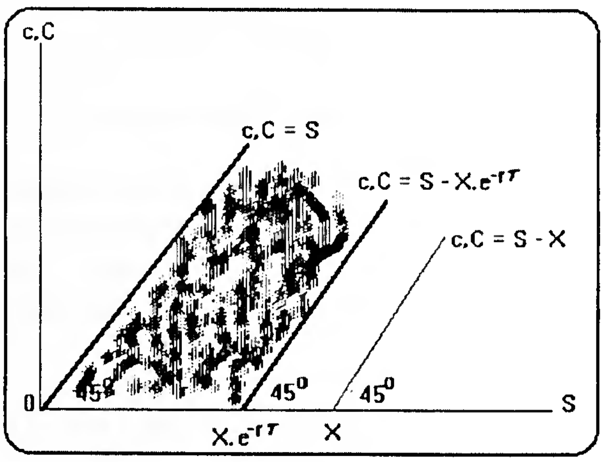
$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -c_t + S_t - X.e^{-r\tau} \leq 0 \quad \vee \quad -C_t + S_t - X.e^{-r\tau} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_t \geq S_t - X.e^{-r\tau} \quad \vee \quad C_t \geq S_t - X.e^{-r\tau}$$

Note-se que a demonstração anterior é válida não só para opções de compra "europeias" mas também "americanas"[68]. Na verdade, como a opção incluída na carteira de arbitragem é comprada, então não se coloca o problema do exercício antecipado da "american call", ou seja, o seu detentor pode mantê-la até à maturidade tornando certo o fluxo financeiro "π_T".

Combinando os limites superior e inferior de variação identificados anteriormente, o gráfico XII mostra o intervalo de variação admissível para o valor de uma opção de compra ("europeia" ou "americana") sobre uma obrigação que não liberta cupões durante o intervalo de tempo "τ" (área sombreada).

Gráfico XII



A observação do gráfico XII permite ainda constatar que **não faz sentido exercer antecipadamente uma opção de compra "americana" sobre uma obrigação que não liberte cash flows até à data de vencimento do contrato.** Isto porque, se a opção estiver "in-the-money" (S>X) será sempre preferível vendê-la (a um valor não inferior a $S\text{-}Xe^{-r\tau}$) do que exercê-la (auferindo somente $S\text{-}X < S\text{-}Xe^{-r\tau}$); caso contrário (S<X), o exercício da opção (e consequente aquisição do activo subjacente a "X") revelar-se-ia irracional pois, seria sempre preferível

---

[68] A desigualdade $C(S,X,T) \geq max[0, S - X]$ constitui também um limite inferior de variação do valor de uma opção de compra "americana" pois, se assim não fosse ($C_t < S_t - X$) bastaria comprar uma "call" ($-C_t$), exercê-la de imediato ($-X$) e vender, em mercado spot, a obrigação recebida ($+S_t$) para obter um lucro sem risco ($-C_t - X + S_t > 0$). Todavia, trata-se de um limite inferior menos exigente do que a restrição imposta pela condição (35), visto que $X > X.e^{-r\tau}$ (isto é, a recta $C = S - X.e^{-r\tau}$ está acima da linha $C = S - X$).

obter o activo no mercado à vista (pagando apenas "S"). Tal acontece pois, enquanto que o exercício da opção ("in-the-money") somente gera o seu *valor intrínseco* (S-X), já a sua venda permite também beneficiar do seu *valor tempo*. Com efeito, como $C_t \geq S_t - X.e^{-r\tau}$ então uma opção de compra "americana" (e "europeia") "in-the-money" sobre uma obrigação "sem cupões" até à maturidade do contrato possui sempre um *valor tempo* positivo ($C_t \geq S_t - X$), a não ser na sua data de vencimento ($\tau = 0 \Rightarrow C_T = S_T - X$). Consequentemente, só faz sentido que este tipo de opções seja exercido na maturidade[69] , uma vez que em qualquer momento anterior o exercício da opção implica o não aproveitamento de um *valor tempo* positivo. Deste modo, o valor (e portanto a fórmula de avaliação) de uma opção "americana" sobre obrigações que não gerem cash-flows durante o intervalo de tempo "τ" deverá ser igual ao da sua equivalente "europeia".

2.4.1.2. Opções "on the spot" com cupões

Considere-se agora uma opção de compra sobre um TDP/LP que liberte cupões entre a data de avaliação (momento "t") e a maturidade do contrato (momento "T").

1) Limite superior de variação

- opções europeias: $\mathbf{c(S,X,T) < S}$ (36)

- opções americanas: $\mathbf{C(S,X,T) < S}$ (37)

O limite superior de variação do seu valor continua a ser dado pelo valor de transacção do seu activo subjacente (afinal, o lucro máximo associado ao exercício da opção, quando X = 0). A demonstração das expressões (36) e (37) é análoga à dedução apresentada para as desigualdades (32) e (33).

2) Limite inferior de variação

- opções europeias: $\mathbf{c(S,X,T) \geq max\ [0, S - I - X.e^{-r\tau}]}$ (38)

sendo,

I ≡ valor actual (isto é, no momento "t") dos cupões vincendos até ao momento "T", ou seja,

[69] Embora o exercício antecipado deste tipo de opções seja irracional do ponto de vista da teoria económica, isto não significa que, na prática, tal não possa acontecer por força da existência de imperfeições ao nível do funcionamento dos mercados. Por exemplo, a existência de custos de transacção (ignorada ao longo da exposição anterior) pode fazer com que o valor de venda da opção seja realmente inferior ao seu *valor intrínseco*.

$$I = \sum_{k=t1}^{tu} J_k \times e^{-r(k-t)}, \text{ em que}$$

$J_k \equiv$ cupão gerado pela obrigação no momento "k"; e
$k \equiv$ data de geração do k-ésimo cupão, com $t < t1$ e $T > tu$.

A primeira parte da expressão (38) $-c(S,X,T) \geq 0-$ decorre da assimetria que caracteriza um contrato de opção e que favorece o seu comprador. Relativamente à segunda parte, ela difere da condição implícita à desigualdade (34) apenas pela consideração do valor actual dos cupões vincendos até à maturidade. De forma intuitiva, a dedução da parcela "I" ao valor da obrigação subjacente ("S") resulta do facto de uma opção de compra "europeia" somente permitir a aquisição do activo subjacente na data de vencimento do contrato. Ora, como o valor de uma obrigação corresponde ao valor actual dos seus cash flows futuros e no momento "T" os cash flows gerados no intervalo de tempo "τ" estarão vencidos, então o valor da obrigação[70] nessa data será dado por $(S_t\text{-}I).e^{r\tau}$ e o valor da opção (se $S_T > X$) corresponderá a $(S_t\text{-}I).e^{r\tau} - X$, o que actualizado para o momento "t" será equivalente a $[(S_t\text{-}I).e^{r\tau} - X].e^{-r\tau} = S_t - I - X.e^{-r\tau}$. Ou seja, o detentor da "call" perderá sempre o valor "I", dado que apenas poderá adquirir a obrigação subjacente no momento "T".

Em termos formais, a desigualdade $c(S,X,T) \geq S - I - X.e^{-r\tau}$ pode ser demonstrada, provando-se que a sua não verificação permitiria a obtenção de margens de arbitragem. Para o efeito, considere-se uma estratégia de arbitragem assente:
a) na aquisição de uma opção de compra ("long call");
b) na venda de uma obrigação subjacente ("short asset");
c) na compra de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") de valor nominal "X" e maturidade "τ"; e
d) na aquisição de tantas "obrigações de cupão zero" ("long OCZ's") quantos os cupões gerados até à maturidade da opção ("u" títulos), com um valor nominal igual ao valor do cupão vincendo ("J_k", com $k = t1, ..., tu$) e com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento de cada cupão ("k-t", com $k = t1, ...,tu$).

[70] Assumindo-se uma "yield curve" horizontal.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO k	MOMENTO T	MOMENTO T
			Se $S_T > X$	*Se* $S_T \leq X$
Long call	$-c_t$		$+(S_T - X)$	0
Short asset	$+S_t$	$-J_k$	$-S_T$	$-S_T$
Long OCZ	$-X.e^{-r\tau}$		$+X.e^{-r\tau}.e^{r(T-t)}$ $= +X$	$+X$
Long OCZ's	$-I$[71]	$+J_k.e^{-r(k-t)}.e^{r(k-t)}$ $= +J_k$		
$\pi =$	$-c_t+S_t-X.e^{-r\tau}-I$	0	0	$-S_T + X \geq 0$

O esquema anterior permite verificar que o valor futuro (isto é, em qualquer momento posterior a "t" e anterior a "T") da carteira de arbitragem nunca é negativo ($\pi_{k,T} \geq 0$). Com efeito, até ao momento "T" (exclusive) e em cada período de capitalização da obrigação subjacente (momentos "k"), o detentor da carteira deixa de auferir o cupão do TDP/LP mas, em contrapartida, é exactamente compensado mediante o recebimento do valor nominal de uma "obrigação de cupão zero" adquirida no momento "t" ($\pi_k = 0$). Na data de vencimento da opção, a obtenção do seu *valor intrínseco*, o recebimento do valor nominal ("X") de uma "obrigação de cupão zero" e a perda do valor de venda do activo subjacente, nunca gerarão um valor negativo para a carteira ($\pi_T \geq 0$).

Consequentemente, a impossibilidade de um mercado eficiente comportar a existência sistemática de oportunidades de arbitragem[72] requer que o valor inicial da carteira seja não positivo, ou seja,

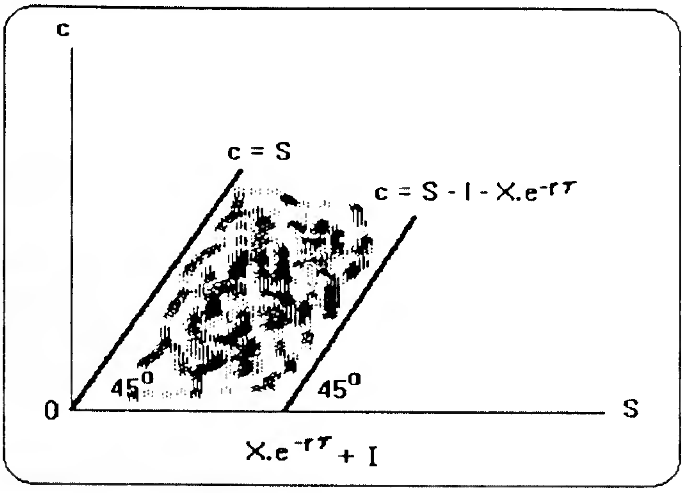
$$\pi_{k,T} \geq 0 \Rightarrow \pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -c_t + S_t - X.e^{-r\tau} - I \leq 0 \Leftrightarrow c_t \geq S_t - I - X.e^{-r\tau}$$

O gráfico XIII resume as condições (36) e (38), mostrando o intervalo de valores admissível para uma opção de compra "europeia" sobre obrigações "com cupões".

[71] $J_{t1}.e^{-r(t1-t)} + ... + J_k.e^{-r(k-t)} + ... + J_{tu}.e^{-r(tu-t)} = I.$

[72] Na verdade, a verificação de $\pi_t > 0$ implicaria a realização maciça da estratégia de arbitragem descrita, o que redundaria na elevação do preço da "call" e na redução do preço da obrigação subjacente em mercado spot até que $\pi_t \leq 0$.

Gráfico XIII



Note-se que, como a linha c = S - I - X.e$^{-r\tau}$ pode estar acima ou abaixo da recta c = S - X, o valor de uma opção de compra "europeia" sobre TDP/LP "com cupões" pode ser inferior ao seu *valor intrínseco.*

- opções americanas:

$$C(S,X,T) \geq \max [0, S\text{-}X.e^{-r(t1-t)}, S\text{-}J_{t1}.e^{-r(t1-t)}\text{-}X.e^{-r(t2-t)}, ..., \tag{39}$$

$$S\text{-}\sum_{k=t1}^{ti-1} J_k \cdot e^{-r(k-t)}\text{-}X.e^{-r(ti-t)}, ..., S\text{-}I\text{-}X.e^{-r\tau}]$$

sendo, $t1 \leq t_{i-1}, t_i \leq tu$.

A condição C(S,X,T) ≥ 0, implícita à expressão (39), resulta do facto de o prémio de uma opção ter de ser pago pelo seu comprador, isto é, pelo titular do direito que tal contrato confere.

Todas as outras condições subjacentes à desigualdade (39) são demonstradas, provando-se que a sua não verificação permitiria a obtenção de margens de lucro sem risco mediante a prossecução de uma estratégia de arbitragem assente no não exercício antecipado de uma opção de compra "americana" até data de vencimento de cada cupão vincendo (ou seja, até aos momentos t1, t2, ..., tu).

Começando pela condição C(S,X,T) ≥ S-X.e$^{-r(t1-t)}$, a sua estratégia de arbitragem justificativa assenta:

a) na compra de uma "call" ("long call"), a qual não é exercida até à data de vencimento do primeiro cupão vincendo (momento "t1");

b) na venda de uma obrigação subjacente ("short asset"); e

c) na aquisição de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ"), com valor nominal "X" e data de vencimento "t1".

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO t1	MOMENTO t1
		Se $S_{t1} > X$	*Se* $S_{t1} \leq X$
Long call	$-C_t$	$+(S_{t1} - X)$[73]	$+C_{t1}(VT)$[74]
Short asset	$+S_t$	$-S_{t1}$	$-S_{t1}$
Long OCZ	$-X.e^{-r(t1-t)}$	$+X$[75]	$+X$[76]
$\pi =$	$-C_t + S_t - X.e^{-r(t1-t)}$	0	$+C_{t1}(VT)+X-S_{t1} \geq 0$

Visto que $\pi_{t1} \geq 0$, então a inexistência de oportunidades duradouras de arbitragem implica que

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -C_t + S_t - X.e^{-r(t1-t)} \leq 0 \Leftrightarrow C_t \geq S_t - X.e^{-r(t1-t)}.$$

A demonstração de todas as restantes "u" condições (tantas quantos os cupões vincendos até à maturidade da opção) irá ser feita conjuntamente, através da consideração de um momento genérico "ti" de vencimento de um cupão. Em qualquer um destes casos, a estratégia de arbitragem consiste:

a) na compra de uma "call" ("long call"), a qual não é exercida até ao vencimento do i-ésimo cupão (ou seja, até ao momento "ti");

b) na venda da obrigação subjacente ("short asset");

c) na compra de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") de valor nominal "X" e maturidade "ti-t"; e

d) na aquisição de tantas "obrigações de cupão zero" ("long OCZ's") quantos os cupões gerados até ao momento "ti", exclusive ("i_{-1}" títulos), com um valor nominal igual ao valor do cupão vincendo ("J_k", com k = t1, ..., ti_{-1}) e com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento de cada cupão ("k-t", com k = t1, ...,ti_{-1}).

---

[73] Caso a opção esteja "in-the-money", então exerce-se a "call".

[74]Caso contrário, não faz sentido exercer a "call". No entanto, esta poderá ser vendida por um valor não negativo (o seu *valor tempo*)

[75]Reembolso da "obrigação de cupão zero" pelo seu valor nominal.

[76]Idem.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO k (k = t1, ...,ti-1)	MOMENTO ti	MOMENTO ti
			Se $S_{ti} > X$	*Se* $S_{ti} \leq X$
Long call	$-C_t$		$+(S_{ti} - X)$	$+C_{ti}(VT)$
Short asset	$+S_t$	$-J_k$[77]	$-S_{ti}$	$-S_{ti}$
Long OCZ	$-X.e^{-r(ti-t)}$		$+X$	$+X$
Long OCZ's	$-\sum_{k=t1}^{ti-1} J_k \cdot e^{-r(k-t)}$[78]	$+J_k.e^{-r(k-t)}.e^{r(k-t)} = +J_k$[79]		
$\pi =$	$-C_t-X.e^{-r(ti-t)} +S_t - \sum_{k=t1}^{ti-1} J_k \cdot e^{-r(k-t)}$	0	0	$+C_{ti}(VT)+X-S_{ti} \geq 0$

Mais uma vez, como o valor futuro da carteira é sempre não negativo ($\pi_k \geq 0$, para $t<k\leq ti$), a não existência de oportunidades requer que o valor actual da carteira seja não positivo, pelo que

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -C_t - X.e^{-r(ti-t)} + S_t - \sum_{k=t1}^{ti-1} J_k \cdot e^{-r(k-t)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_t \geq S_t - \sum_{k=t1}^{ti-1} J_k \cdot e^{-r(k-t)} - X.e^{-r(ti-t)}$$

Dada a existência de várias hipóteses para o limite de variação inferior do valor deste tipo de opções, não é possível desenhar um gráfico representativo do seu intervalo de variação. Todavia, a fórmula (39) permite verificar que o **exercício antecipado de opções de compra "americanas" sobre obrigações que gerem cupões até à maturidade do**

[77] Pelo facto de não se possuir a obrigação subjacente, deixa-se de receber os cupões $J_{t1}, ..., J_{ti-1}$, nos momentos t1, ..., ti-1.
[78] Somatório do preço de cada uma das "i-1" "obrigações de cupão zero" adquiridas.
[79] A perda de cada cupão com vencimento anterior ao momento "ti" é exactamente compensada pelo recebimento do valor nominal da "obrigação de cupão zero" correspondente.

contrato apenas poderá ter lugar nas datas de vencimento dos cupões vincendos (momentos k, sendo k = t1, ..., tu)[80]. Intuitivamente, tal acontece pois, enquanto o exercício da opção proporciona somente o seu *valor intrínseco*, já a sua venda numa data não coincidente com o vencimento de um cupão (ou com a maturidade da opção) permite obter também um *valor tempo* não negativo. Do ponto de vista analítico, a afirmação anterior pode ser provada, mostrando-se que em qualquer momento não coincidente com as datas de vencimento dos cupões não se justifica o exercício da opção (pois, a sua venda permite obter um valor superior ao seu *valor intrínseco*):

i) <u>momento anterior à data de vencimento do primeiro cupão</u> ≡ momento t* < t1

Atendendo à expressão (39), constata-se que, neste caso, é aplicável a condição

$$C_{t*} \geq S_{t*} - X.e^{-r(t1-t*)}$$

e portanto, como $X.e^{-r(t1-t*)} < X$, verifica-se que

$$C_{t*} \geq S_{t*} - X,$$

razão pela qual o exercício antecipado da opção (com o consequente recebimento de apenas S_{t*}-X) não se afigura economicamente racional (visto a sua venda possibilitar o recebimento de um valor -C_{t*}- superior).

ii) <u>momento situado entre o vencimento de dois cupões</u> ≡ momento t*, com t_{i-1} < t* < ti

Para constatar a irracionalidade associada ao exercício antecipado da opção, considere-se a seguinte estratégia de arbitragem, cujos fluxos financeiros se evidenciam no quadro abaixo exposto:

a) compra de uma "call" ("long call"), a qual não será exercida até ao momento de vencimento do próximo cupão (isto é, até ao momento "ti");

b) venda de uma obrigação subjacente ("short asset"); e

c) aquisição de uma "obrigação de cupão zero" com um valor nominal "X" e maturidade "ti-t*".

<u>ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM</u>

CARTEIRA	MOMENTO t*	MOMENTO ti	MOMENTO ti
		Se $S_{ti} > X$	*Se* $S_{ti} \leq X$
Long call	$-C_{t*}$	$+(S_{ti} - X)$	$+C_{ti}(VT)$
Short asset	$+S_{t*}$	$-S_{ti}$	$-S_{ti}$
Long OCZ	$-X.e^{-r(ti-t*)}$	+X	+X
π =	$-C_{t*} + S_{t*} - X.e^{-r(ti-t*)}$	0	$+C_{ti}(VT)+X-S_{ti} \geq 0$

[80]De qualquer modo, como existe a possibilidade de a opção ser exercida antes da sua data de vencimento, então o seu valor será necessariamente distinto (para mais) do preço da sua congénere "europeia".

Como $\pi_{t_i} \geq 0$ e de modo a não permitir a obtenção de lucros sem risco, o valor inicial da carteira terá de ser não positivo, ou seja,

$$\pi_{t*} \leq 0 \Leftrightarrow -C_{t*} + S_{t*} - X.e^{-r(ti-t*)} \leq 0 \Leftrightarrow C_{t*} \geq S_{t*} - X.e^{-r(ti-t*)}.$$

Mas assim sendo, então o valor da opção vem superior ao seu *valor intrínseco*, pois

$$C_{t*} \geq S_{t*} - X.e^{-r(ti-t*)} \Rightarrow C_{t*} \geq S_{t*} - X,$$

pelo que não se justifica o seu exercício antecipado.

iii) <u>momento posterior à data de vencimento do último cupão</u> ≡ momento t^*, com $tu<t^*<T$

Recorrendo novamente à desigualdade (39), observa-se que o valor da "call" terá de obedecer à condição $C_{t*} \geq S_{t*} - X.e^{-r(T-t*)}$, uma vez que $I = 0$ (ou, $t^*>tu$). Consequentemente, $C_{t*} \geq S_{t*} - X$ e mais uma vez se prova que o valor da opção (obtido através da sua venda) supera o seu *valor intrínseco* (resultante do seu exercício antecipado).

2.4.1.3. Opções sobre futuros

Por fim, ir-se-á analisar o intervalo de variação do valor de uma opção de compra sobre futuros de TDP/LP, o que permitirá constatar que a questão do exercício antecipado das opções "americanas" coloca-se agora de forma diferente. Ao longo da exposição e por uma questão de simplicidade, dever-se-á considerar que a cotação do futuro ("F") já se encontra corrigida pelo respectivo factor de conversão.

1) Limite superior de variação

- opções europeias: $\mathbf{c(F,X,T) < F}$ (40)

- opções americanas: $\mathbf{C(F,X,T) < F}$ (41)

A demonstração das condições (40) e (41) é feita de forma análoga à realizada para as opções "on the spot":

$F \geq^{81} c(F,0,+\infty)$ ou $C(F,0,+\infty) >^{82} c(F,X,T)$ ou $C(F,X,T)$ para $X > 0$ e $T < +\infty$.

2) Limite inferior de variação

- opções europeias: $\mathbf{c(F,X,T) \geq \max [0, (F\text{-}X).e^{-r\tau}]}$ (42)

Mais uma vez, a assimetria do contrato de opção justifica que $c(F,X,T) \geq 0$, mas a estratégia de arbitragem que impõe a condição $c(F,X,T) \geq (F\text{-}X).e^{-r\tau}$ consiste agora:

a) na aquisição de uma opção de compra ("long call");

b) na venda de uma "obrigação de cupão zero"[83] ("short OCZ"), com uma maturidade "τ" e com um valor nominal igual à diferença entre a cotação actual do futuro e o preço de exercício da opção (isto é, "F_t - X"); e

c) na venda, em cada dia "t+s" (s = 0,1, ...,τ-1) anterior à data de vencimento da opção, de "$e^{-r[T-(t+s+1)]}$" contratos futuros, para no dia seguinte ("t+s+1") esses mesmos contratos serem comprados e o resultado gerado ($-e^{-r[T-(t+s+1)]}.(F_{t+s+1}-F_{t+s})$) ser financiado (se for negativo, ou aplicado, se for positivo) até à data de vencimento da opção mediante a venda de uma "obrigação de cupão zero" com maturidade "T-(t+s+1)" e de valor nominal $(F_{t+s+1}-F_{t+s})$. Estas operações recebem a designação de "short rollover futures" e asseguram a obtenção de um cash flow "$-(F_T-F_t)$" no momento "T", senão vejamos:

Momento	Nº de futuros vendidos	Resultado dos futuros	Venda de OCZ	Cash flow de cada período
t	$e^{-r[T-(t+1)]}$			
t+1	$e^{-r[T-(t+2)]}$	$-e^{-r[T-(t+1)]}.(F_{t+1}-F_t)$	$+e^{-r[T-(t+1)]}.(F_{t+1}-F_t)$	0
t+2	$e^{-r[T-(t+3)]}$	$-e^{-r[T-(t+2)]}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	$+e^{-r[T-(t+2)]}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	0
...	...	...	...	...
t+s	$e^{-r[T-(t+s+1)]}$	$-e^{-r[T-(t+s)]}.(F_{t+s}-F_{t+s-1})$	$+e^{-r[T-(t+s)]}.(F_{t+s}-F_{t+s-1})$	0
...	...	...	...	...
T-1	$e^{-r[T-(T)]} = 1$	$-e^{-r[T-(T-1)]}.(F_{T-1}-F_{T-2})$	$+e^{-r}.(F_{T-1}-F_{T-2})$	0
T	0	$-1.(F_T-F_{T-1})$	0	CF_T

[81] Possuir uma posição "longa" sobre um futuro é pelo menos equivalente a deter o direito de, a custo zero e em qualquer momento no tempo, passar a deter essa mesma posição (mediante o exercício da opção de compra).

[82] Pois. $dc,C/dX < 0$ e $dc,C/dT > 0$.

[83] Corresponde, no fundo, à contracção de um financiamento no valor de $(F_t\text{-}X).e^{-r\tau}$, à taxa de juro "r" e durante o intervalo de tempo "τ".

em que, o cash flow ocorrido no momento "T" (CF_T) corresponde não só ao resultado do contrato futuro desse período mas também ao pagamento do valor nominal das "obrigações de cupão zero" (OCZ) vendidas nos momentos "t+s" (s = 1, ..., τ-1), ou seja,

$$CF_T = -e^{-r[T-(t+1)]}.(F_{t+1}-F_t).e^{r[T-(t+1)]} - e^{-r[T-(t+2)]}.(F_{t+2}-F_{t+1}).e^{r[T-(t+2)]} - \dots -$$

$$- e^{-r}.(F_{T-1}-F_{T-2}).e^{r} - 1.(F_T-F_{T-1}) =$$

$$= -(F_{t+1}-F_t) - (F_{t+2}-F_{t+1}) - \dots - (F_{T-1}-F_{T-2}) - (F_T-F_{T-1}) =$$

$$= -(F_T - F_t)$$ [84]

Deste modo, o quadro seguinte sintetiza os cash flows inerentes à estratégia de arbitragem definida anteriormente:

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T	MOMENTO T
		Se $F_T > X$	*Se* $F_T \leq X$
Long call	$-c_t$	$F_T - X$	0
Short OCZ	$+(F_t-X).e^{-r\tau}$	$-(F_t-X)$[85]	$-(F_t-X)$[86]
Short rollover futures	0	$-(F_T - F_t)$	$-(F_T - F_t)$
$\pi =$	$-c_t +(F_t-X).e^{-r\tau}$	0	$X - F_T \geq 0$

Verifica-se assim que $\pi_T \geq 0$, pelo que

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -c_t +(F_t-X).e^{-r\tau} \leq 0 \Leftrightarrow c_t \geq (F_t-X).e^{-r\tau}$$

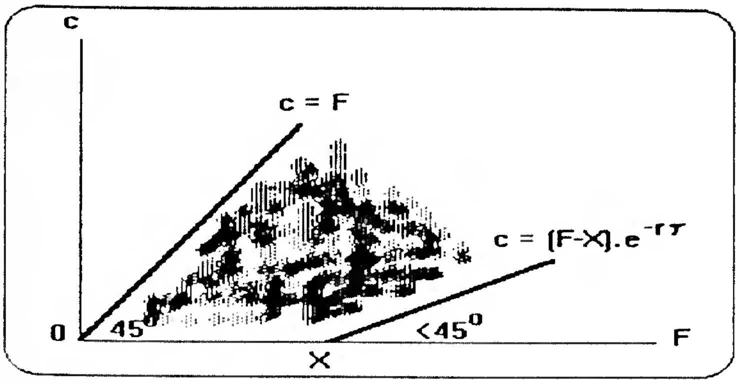
O gráfico XIV traduz o intervalo de variação do valor de uma opção de compra "europeia" sobre futuros de TDP/LP e mostra que tal valor pode ser inferior ao *valor intrínseco* do contrato:

[84] Note-se que a assunção de apenas uma posição "curta" sobre um único contrato futuro só gera um cash flow "$-(F_T - F_t)$" no momento "T" desde que os desfasamentos temporais entre as diversas variações de margem sejam ignorados, isto é, desde que o contrato futuro seja tratado como sendo equivalente a um contrato forward. Contudo, o perfil de fluxos financeiros dos dois contratos é diferenciado pois, enquanto o contrato forward envolve somente um cash flow na sua maturidade, já um contrato futuro liberta resultados diariamente.

[85] Reembolso do valor nominal da "obrigação de cupão zero".

[86] Idem.

Gráfico XIV



- opções americanas: **C(F,X,T) ≥ max [0, F - X]** (43)

Quanto à condição C(F,X,T) ≥ 0, a sua justificação é idêntica à apresentada nos casos anteriores: o prémio tem de ser pago por quem usufrui do direito conferido pela posse do contrato (o seu comprador).

Relativamente à condição C(F,X,T) ≥ F - X, a sua não verificação possibilitaria a realização de ganhos de arbitragem mediante a execução de uma estratégia extremamente simples, a saber:

a) aquisição de uma opção de compra ("long call"); e

b) imediato exercício da mesma, acompanhado pela venda simultânea de um contrato futuro ("short future"). Deste modo, através do exercício da opção obtém-se uma posição "longa" sobre um contrato futuro, a qual é logo anulada via realização de uma operação simétrica ("short future"), possibilitando assim a obtenção do resultado do futuro.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t
Long call	$-C_t$
Exercício e short future	$F_t - X$
$\pi_t =$	$-C_t + F_t - X$

Com efeito, a inexistência de oportunidades de arbitragem implica que

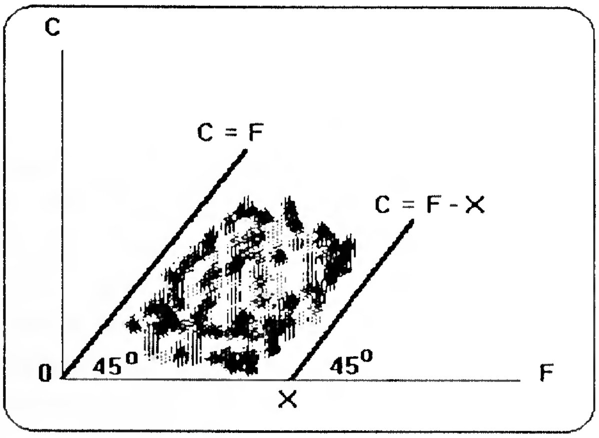
$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -C_t + F_t - X \leq 0 \Leftrightarrow$$

pelo que,

$$\Leftrightarrow C_t \geq F_t - X$$[87]

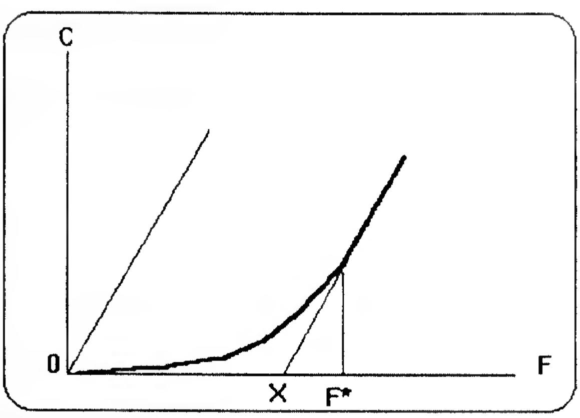
Finalmente, o intervalo de variação do valor de uma "call americana" sobre futuros é representado pela área sombreada do gráfico XV.

Gráfico XV



Ao contrário do que sucede com as opções de compra "americanas" sobre obrigações que não libertam cupões até ao vencimento do contrato, o valor de uma "call americana" sobre futuros de TDP/LP não é sempre superior ao seu *valor intrínseco*. Na verdade, para cotações do futuro suficientemente elevadas (ou seja, quando a opção está "deep in-the-money"), a probabilidade de ocorrência de uma subida adicional de "F" torna-se negligenciável e portanto o *valor tempo* da opção tende para zero, isto é, o valor da "call" identifica-se com o seu *valor intrínseco*. Este fenómeno encontra-se representado no gráfico XVI.

Gráfico XVI



Deste modo, **para níveis suficientemente elevados da cotação do futuro subjacente** (isto é, para F > F*), **pode haver lugar ao exercício antecipado de uma opção de compra "americana" sobre futuros de TDP/LP**. Consequentemente, o modelo de avaliação deste tipo de opções terá de ser necessariamente distinto da fórmula aplicável às opções "europeias" equivalentes.

---

[87] Repare-se que uma opção de compra "americana" sobre futuros também obedece à condição $C(F,X,T) \geq (F-X).e^{-r\tau}$, visto que a "call" associada à estratégia de arbitragem subjacente à desigualdade (42) é comprada, evitando assim o problema do seu exercício antecipado. Todavia, a condição (43) é mais restritiva, uma vez que $F-X \geq (F-X).e^{-r\tau}$.

2.4.2. Opções de venda

2.4.2.1. Opções "on the spot" sem cupões[88]

1) Limite superior de variação

- opções europeias: $\mathbf{p(S,X,T) \leq X.e^{-r\tau}}$ (44)

A condição (44) estipula que o valor de uma "put europeia" não pode ser superior ao valor actualizado do seu preço de exercício, pelo tempo em falta até à maturidade da opção. Tal acontece pois, na hipótese contrária seria sempre possível auferir um ganho sem risco mediante:

a) a venda de uma opção de venda ("short put"); e simultânea

b) aquisição de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") de valor nominal igual ao preço de exercício da opção e maturidade "τ".

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T	MOMENTO T
		Se $S_T \geq X$	*Se* $S_T < X$
Short put	$+p_t$	0[89]	$-(X-S_T)$[90]
Long OCZ	$-X.e^{-r\tau}$	$+X$	$+X$
$\pi =$	$+p_t -X.e^{-r\tau}$	$+X > 0$	$+S_T \geq 0$

Como $\pi_T \geq 0$, logo a inexistência de oportunidades de arbitragem impõe que

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow +p_t - X.e^{-r\tau} \leq 0 \Leftrightarrow p_t \leq X.e^{-r\tau}$$

- opções americanas: $\mathbf{P(S,X,T) \leq X}$ (45)

Tratando-se de opções americanas, nada impede que o seu valor seja superior a $X.e^{-r\tau}$, pois como uma "put" vendida pode ser exercida antecipadamente, então a estratégia definida anteriormente nem sempre se revelará lucrativa: na data de exercício antecipado,

[88] Opções de venda sobre obrigações que não libertem cupões até à data de vencimento do contrato.

[89] Se a "put" estiver "out-of-the-money", o seu detentor não a deverá exercer.

[90] Caso a opção esteja "in-the-money", ela será, em princípio, exercida e portanto haverá que comprar a obrigação subjacente ao preço de exercício definido (-X), a qual poderá então ser vendida em mercado spot ou, pura e simplesmente, poderá ser detida sem que seja necessário despender "S_T".

o valor acumulado resultante da aplicação do valor "$X.e^{-r\tau}$" poderá ser insuficiente para cobrir o diferencial desfavorável entre o preço de exercício pago e a cotação spot da obrigação subjacente, sendo o valor actual de tal perda superior ao ganho realizado no momento inicial.

Todavia, o preço de uma "american put" nunca poderá exceder o seu preço de exercício, uma vez que se assim fosse bastaria vender uma opção de venda ("short put") e, simultaneamente, comprar uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ"), com maturidade "τ" e valor nominal "$X.e^{r\tau}$", para beneficiar de um lucro certo.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	SE A PUT FOR EXERCIDA (momento k: $t<k\leq T$)	SE A PUT NÃO FOR EXERCIDA (momento T)
Short put	$+P_t$	$-(X-S_k)$	0
Long OCZ	$-X$	$+X.e^{r(k-t)}$	$+X.e^{r\tau}$
$\pi =$	$P_t - X$	$+X.[e^{r(k-t)}-1]+S_k \geq 0$	$+X.e^{r\tau} > 0$

Com efeito, se a opção de venda for exercida durante a sua vida, haverá que pagar o preço de exercício ao comprador da opção, em troca pelo recebimento de uma obrigação com uma dada cotação em mercado spot. Para tal, bastará desmobilizar a "obrigação de cupão zero" adquirida inicialmente, o que possibilitará ainda a obtenção de um ganho correspondente aos juros auferidos até à data de exercício ($X.[e^{r(k-t)}-1]$), para além do valor associado ao activo recebido (S_k). Caso contrário, isto é, se a "put" nunca chegar a ser exercida, então a estratégia de arbitragem anterior libertará um único cash flow após a sua implementação, o qual será necessariamente positivo e corresponderá ao valor de reembolso da "obrigação de cupão zero" (o seu valor nominal -$X.e^{r\tau}$- se o reembolso ocorrer na data de vencimento da obrigação).

Em suma, o valor futuro da carteira será sempre não negativo ($\pi_k \geq 0$, para $t<k\leq T$), pelo que num mercado eficiente ter-se-á de verificar a seguinte desigualdade:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow P_t - X \leq 0 \Leftrightarrow P_t \leq X$$

No fundo, as condições (44) e (45) apenas impõem que o valor de uma opção de venda ("europeia" ou "americana") não seja superior ao lucro máximo que tal contrato poderá proporcionar. De facto, uma "put" atinge o ponto máximo do seu perfil de lucro quando a cotação do activo subjacente é nula, correspondendo esse ponto extremo ao preço de exercício da opção, no caso de uma "american put", e ao valor actualizado do preço de exercício da opção, no caso de uma "european put" (uma vez que o exercício deste tipo de opções apenas poderá ocorrer com um desfasamento temporal de "τ" períodos de tempo, ou seja, na maturidade do contrato).

2) Limite inferior de variação

- opções europeias: $\mathbf{p(S,X,T) \geq max\ [0, X.e^{-r\tau} - S]}$ (46)

Em primeiro lugar, a desigualdade (46) estipula que o preço de uma opção de venda nunca pode ser negativo -$p(S,X,T) \geq 0$- pois, tal significaria que o seu comprador para além de usufruir do direito de exercício da opção ainda seria remunerado por tal facto.

Em segundo lugar e quando $X.e^{-r\tau} > S$, o valor de uma "put europeia sem cupões" terá de obedecer ao limiar mínimo definido pela condição $p(S,X,T) \geq X.e^{-r\tau} - S$, pois em contrário:
a) a aquisição de uma opção de venda ("long put");
b) a compra de uma obrigação subjacente ("long asset"); e
c) a venda de uma "obrigação de cupão zero" ("short OCZ") de valor nominal "X" e maturidade "τ",
permitirá a obtenção de ganhos certos (isto é, sem risco).

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T	MOMENTO T
		Se $S_T \geq X$	*Se* $S_T < X$
Long put	$-p_t$	0[91]	$+(X-S_T)$[92]
Long asset	$-S_t$	$+S_T$[93]	$+S_T$[94]
Short OCZ	$+X.e^{-r\tau}$	-X	-X
π =	$-p_t-S_t+X.e^{-r\tau}$	$S_T - X \geq 0$	0

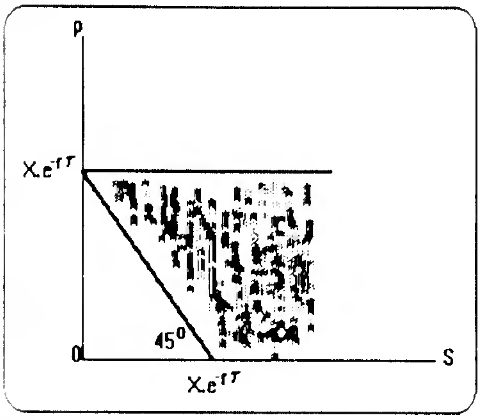
Consequentemente, como o valor futuro da carteira é não negativo ($\pi_T \geq 0$), então a inexistência de oportunidades de arbitragem requer que o valor actual da carteira seja não positivo, isto é,

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -p_t-S_t+X.e^{-r\tau} \leq 0 \Leftrightarrow p_t \geq X.e^{-r\tau} - S_t$$

[91] A opção não é exercida, caso esteja "out-of-the-money".
[92] O exercício da opção "in-the-money" permite receber o seu preço de exercício, mas impede a venda da obrigação subjacente em mercado spot.
[93] Se a opção não for exercida, a obrigação detida poderá ser vendida em mercado spot.
[94] Se a opção for exercida, a sua liquidação física será feita mediante a entrega da obrigação detida, razão pela qual deixará de ser necessário adquirir tal activo no mercado à vista.

O gráfico XVII mostra o intervalo de variação de uma opção de venda "europeia" sobre obrigações que não libertem cash flows até à data de vencimento do contrato (área sombreada), mediante a combinação das restrições (44) e (46).

Gráfico XVII



Este gráfico permite observar que opções de venda "europeias sem cupões" que estejam "in-the-money" ($S<X$) poderão ser valorizadas abaixo do seu *valor intrínseco* (pois, $X.e^{-rT}-S \leq X-S$). Ora, como o valor de tais opções na maturidade do contrato terá de ser igual ao seu *valor intrínseco* ($X-S$), então pode acontecer que o seu preço aumente à medida que o tempo em falta para a data de vencimento diminui (o que, conforme foi assinalado aquando da análise dos determinantes do valor de uma opção, constitui uma excepção à regra definida por $dp/dT > 0$).

- opções americanas: $\mathbf{P(S,X,T) \geq max\ [0, X - S]}$ (47)

A justificação da restrição $P(S,X,T) \geq 0$ é idêntica à formulada anteriormente para os diversos tipos de opções já analisados.

Por outro lado e tratando-se de opções "americanas", como estas podem ser exercidas a qualquer momento, então o seu limite inferior de variação é mais restritivo do que o imposto pela desigualdade (46). Com efeito, se a condição $P(S,X,T) \geq X-S$ não fosse observada, poder-se-ia auferir um lucro sem risco através:
a) da aquisição de uma obrigação subjacente ("long asset");
b) da compra ("long put") de uma opção de venda; e
c) do imediato exercício dessa opção (e consequente recebimento do seu preço de exercício), mediante a entrega da obrigação subjacente adquirida.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t
Long asset	$-S_t$
Long put	$-P_t$
Exercício	$+X$
$\pi_t =$	$-S_t-P_t+X$

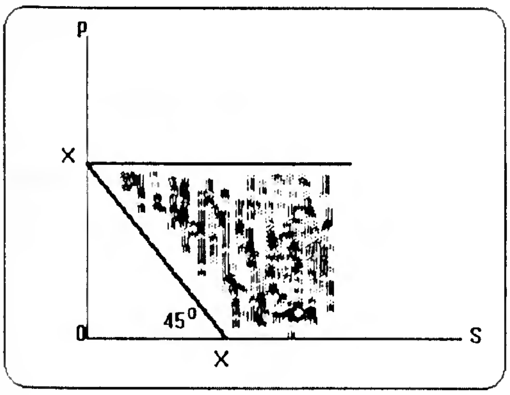
Então, para que a estratégia anterior não gere um ganho de arbitragem, o valor da opção terá de ser tal que:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -S_t - P_t + X \leq 0 \Leftrightarrow P_t \geq X - S_t$$

Repare-se que, como a estratégia de arbitragem subjacente à condição (46) envolve a compra de uma opção de venda, então o valor de uma "put americana" também obedece a essa mesma restrição, visto que o seu detentor pode detê-la até ao momento do seu vencimento. Contudo, o limite inferior (47) é mais restritivo do que o anterior (pois, $X-S \geq X.e^{-r\tau}-S$) e portanto constitui o patamar mínimo de variação do valor de uma opção de venda americana.

Conjugando as restrições (45) e (47) obtém-se o intervalo de valores admissível para uma opção de venda sobre obrigações que não libertem cupões até à data de vencimento do contrato, o qual é representado pela área sombreada do gráfico XVIII.

Gráfico XVIII



Comparando os gráficos XVII e XVIII constata-se que as opções de venda "americanas" sobre obrigações "sem cupões" podem assumir valores mais elevados do que as suas homólogas "europeias". Tal diferença corresponde ao prémio de exercício antecipado incorporado no preço das opções "americanas" e decorrente do facto de o exercício antecipado destes contratos se revelar muitas vezes como sendo a estratégia óptima a adoptar pelo seu detentor.

Na verdade, **uma opção de venda "americana" sobre uma obrigação que não gere fluxos financeiros até à maturidade do contrato pode ser exercida antecipadamente** desde que, estando "in-the-money" e sendo desprezível a probabilidade de a cotação da obrigação subjacente ultrapassar o preço de exercício da opção, o juro associado à aplicação do preço de exercício da opção até à sua data de vencimento supere o *valor tempo* da "put"[95] . Daqui irá decorrer a necessidade de desenvolver dois modelos distintos de avaliação: um para as opções de venda "europeias" e outro para os contratos de tipo "americano".

[95] Na prática, a opção pode ser exercida mesmo que o rendimento proporcionado pela aplicação do seu preço de exercício não seja superior ao seu *valor tempo*. Isto porque, o *valor tempo* de uma opção só pode ser realizado através da sua venda e se a expectativa de evolução da cotação da obrigação subjacente for partilhada pelo mercado em geral, então ninguém estará disposto a adquirir a opção e portanto será sempre preferível usufruir da remuneração gerada pelo investimento do preço de exercício recebido via exercício da opção.

2.4.2.2. Opções "on the spot" com cupões

1) Limite superior de variação

- opções europeias: $\mathbf{p(S,X,T) \leq X.e^{-r\tau}}$ (48)

- opções americanas: $\mathbf{P(S,X,T) \leq X}$ (49)

O patamar máximo de variação do valor das opções de venda ("europeias" ou "americanas") sobre obrigações que libertem cash flows até à maturidade dos contratos é igual ao limite superior definido anteriormente para as opções de venda "on the spot" mas "sem cupões". Isto porque, as estratégias de arbitragem subjacentes às condições (44) e (45) também se aplicam às opções de venda "on the spot" "com cupões", uma vez que as suas carteiras de arbitragem não envolvem a transacção da obrigação subjacente.

2) Limite inferior de variação

- opções europeias: $\mathbf{p(S,X,T) \geq max\ [0, X.e^{-r\tau} - S + I]}$ (50)

sendo,

I ≡ valor actual dos cupões vincendos até ao momento "T", ou seja,

$$I = \sum_{k=t1}^{tu} J_k \times e^{-r(k-t)}, \text{ em que}$$

J_k ≡ cupão gerado pela obrigação no momento "k"; e
k ≡ data de geração do k-ésimo cupão, com t < t1 e T > tu.

Relativamente à condição p(S,X,T) ≥ 0, ela resulta, mais uma vez, do carácter assimétrico de que se reveste o contrato de opção.

Quanto à condição $p(S,X,T) \geq X.e^{-r\tau}-S+I$[96] , a sua verificação decorre da inviabilização da seguinte estratégia de arbitragem:
a) aquisição de uma opção de venda ("long put");
b) compra de uma obrigação subjacente ("long asset");
c) venda de uma "obrigação de cupão zero" ("short OCZ") de valor nominal "X" e maturidade "τ"; e

[96] A única diferença relativamente ao limite inferior de variação de uma opção de venda "on the spot" e "sem cupões" consiste na soma do valor actual dos cupões a vencer até ao momento de vencimento da opção. Tal acontece visto que, como uma "put europeia" apenas pode dar lugar à venda da obrigação subjacente na maturidade da opção então, é possível usufruir dos cupões libertos até ao momento "T".

d) venda de tantas "obrigações de cupão zero" ("short OCZ's") quantos os cupões gerados até à maturidade da opção ("u" títulos), com um valor nominal igual ao valor do cupão vincendo ("J_k", com k = t1, ..., tu) e com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento de cada cupão ("k-t", com k = t1, ...,tu).

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO k	MOMENTO T Se $S_T \geq X$	MOMENTO T Se $S_T < X$
Long put	$-p_t$		0	$+(X-S_T)$
Long asset	$-S_t$	$+J_k$	$+S_T$	$+S_T$
Short OCZ	$+X.e^{-r\tau}$		$-X.e^{-r\tau}.e^{r(T-t)} = -X$	$-X$
Short OCZ's	$+I$	$-J_k.e^{-r(k-t)}.e^{r(k-t)} = -J_k$		
$\pi =$	$-p_t-S_t+X.e^{-r\tau}+I$	0	$+S_T - X \geq 0$	0

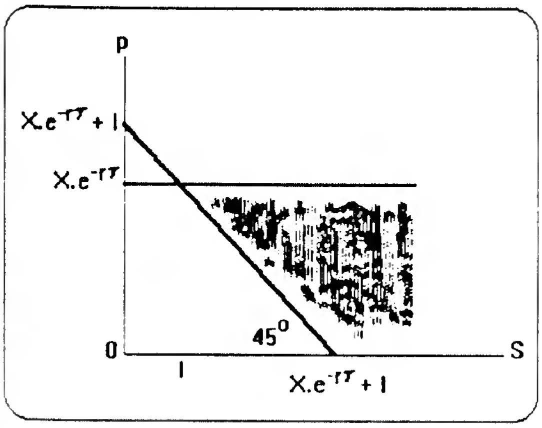
Conforme se pode constatar a partir da leitura do quadro anterior, o valor futuro da carteira considerada é sempre não negativo ($\pi_{k,T} \geq 0$). Até à data de vencimento da opção e em cada período de capitalização da obrigação subjacente, o cupão recebido, pelo facto de se deter uma posição "longa" sobre a referida obrigação, é canalizado para o reembolso de uma "obrigação de cupão zero" com um valor nominal de idêntico montante, pelo que o valor futuro da carteira é nulo entre os momentos "t" e "T". Na maturidade da opção e se esta estiver "in-the-money", ela será exercida mediante a entrega da obrigação adquirida no momento "t" e o preço de exercício recebido será integralmente utilizado para amortizar o valor nominal de uma "obrigação de cupão zero" alienada aquando da constituição da carteira (donde, o valor futuro da carteira, no momento "T", permanecerá nulo). Na hipótese contrária, ou seja, se a "put" estiver "out-of-the-money", ela não será exercida, procedendo-se unicamente à venda da obrigação detida bem como à amortização de uma "obrigação de cupão zero" com um valor nominal igual ao preço de exercício, o que, como $S_T \geq X$, originará um valor não negativo para a carteira no momento "T".

Deste modo, a inexistência de oportunidades de arbitragem impõe que o valor actual da carteira seja não positivo, isto é,

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -p_t-S_t+X.e^{-r\tau}+I \leq 0 \Leftrightarrow p_t \geq X.e^{-r\tau} - S_t + I$$

A área sombreada do gráfico XIX evidencia o intervalo de variação do valor de uma opção de venda sobre uma obrigação que liberte cupões até à data de vencimento da "put".

Gráfico XIX



Comparando este gráfico com o diagrama XVII, pode-se concluir que o intervalo de variação do valor de uma "put europeia com cupões" é menor do que o conjunto de valores admissível para as suas congéneres "sem cupões". Com efeito, como o valor de uma obrigação equivale ao somatório do valor actual dos seus cash flows futuros, então a cotação "S" nunca poderá ser inferior ao valor actual dos cupões vincendos e portanto o preço da opção de venda correspondente só terá significado para $S \geq I$[97] .

- opções americanas:

$$\mathbf{P(S,X,T) \geq max\ [0,\ X\text{-}S,\ X.e^{-r(t1-t)}\text{-}S+J_{t1}.e^{-r(t1-t)}\text{-},\ ...,} \qquad (51)$$

$$\mathbf{X.e^{-r(ti-t)}\text{-}S+\sum_{k=t1}^{ti} J_k \cdot e^{-r(k-t)}\text{-},\ ...,\ X.e^{-r(tu-t)}\text{-}S+I]}$$

sendo, $t1 \leq ti \leq tu$.

Enquanto que a condição $P(S,X,T) \geq 0$ deriva do facto de o pagamento do prémio de uma opção caber à parte a quem o contrato confere um direito (o comprador), já a restrição $P(S,X,T) \geq X - S$ resulta da possibilidade de exercício imediato de uma opção "americana"[98] .

Quanto às restantes "u" condições implícitas na desigualdade (51), todas elas resultam da necessidade de inviabilização de estratégias de arbitragem que passem pelo exercício antecipado de uma opção de venda "americana" no instante seguinte[99] ao momento de vencimento de cada cupão. A sua demonstração pode ser feita considerando-se um momento genérico "ti" de geração do i-ésimo cupão vincendo até à data de vencimento da opção, por parte da obrigação subjacente a tal contrato, e desenvolvendo os fluxos financeiros associados à seguinte estratégia de arbitragem:

---

[97] Ponto de intersecção das linhas limite das restrições (48) e (50): $p = X.e^{-rT}$ e $p = - S + (X.e^{-rT} + I)$.

[98] Vide demonstração da restrição (47).

[99] Na prática, no dia útil seguinte.

a) compra de uma opção de venda ("long put"), a qual é exercida (ou vendida, caso esteja "out-of-the-money") no instante seguinte[100] à data de vencimento do i-ésimo cupão (ou seja, no momento "ti+ε", designando "ε" um instante de tempo);
b) aquisição da obrigação subjacente ("long asset");
c) venda de uma "obrigação de cupão zero" ("short OCZ") de valor nominal "X" e maturidade correspondente ao tempo em falta para o exercício (ou venda) da opção "$(ti+\varepsilon)-t$"; e
d) alienação de tantas "obrigações de cupão zero" ("long OCZ's") quantos os cupões gerados até ao momento "ti", inclusive ("i" títulos), com um valor nominal igual ao valor do cupão vincendo ("J_k", com k = t1, ..., ti) e com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento de cada cupão ("k-t", com k = t1, ...,ti).

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO k (k = t1, ...,ti)	MOMENTO ti+ε	MOMENTO ti+ε
			Se $S_{ti+\varepsilon} < X$	*Se* $S_{ti+\varepsilon} \geq X$
Long put	$-P_t$		$+(X - S_{ti+\varepsilon})$	$+P_{ti+\varepsilon}(VT)$
Long asset	$-S_t$	$+J_k$	$+S_{ti+\varepsilon}$	$+S_{ti+\varepsilon}$
Short OCZ	$+X.e^{-r[(ti+\varepsilon)-t]}$		-X	-X
Short OCZ's	$+\sum_{k=t1}^{ti} J_k \cdot e^{-r(k-t)}$	$-J_k.e^{-r(k-t)}.e^{r(k-t)} = +J_k$		
π =	$-P_t + X.e^{-r[(ti+\varepsilon)-t]} - S_t + \sum_{k=t1}^{ti} J_k \cdot e^{-r(k-t)}$	0	0	$+P_{ti+\varepsilon}(VT) + (S_{ti+\varepsilon} - X) \geq 0$

Até à data de exercício (ou de venda) da opção, isto é, no momento de vencimento de cada um dos "i" cupões vincendos até ao período "ti" (momentos k = t1, t2, ..., ti), o valor da carteira de arbitragem é nulo ($\pi_k = 0$) visto que cada cupão recebido ("J_k") é integralmente utilizado para reembolsar uma "obrigação de cupão zero" com idêntico valor nominal. No instante seguinte ao vencimento do i-ésimo cupão (momento "ti+ε") e se a "put" estiver "in-the-money" ($S_{ti+\varepsilon} < X$), proceder-se-à ao exercício da opção de venda mediante a entrega da obrigação adquirida no momento "t" e sendo o preço de exercício recebido canalizado para a amortização de uma "obrigação de cupão zero" de valor nominal "X", pelo que o valor da carteira permanecerá nulo ($\pi_{ti+\varepsilon} = 0$). Se a opção de venda estiver "out-of-the-money", então o seu exercício não se revelará vantajoso e portanto a "put" será vendida por forma a proporcionar o recebimento do respectivo *valor tempo* (o qual, por seu turno, será necessariamente não negativo, ou seja, $P_{ti+\varepsilon}(VT) \geq 0$).

[100] Deste modo, o cupão de ordem "i" ainda é recebido pelo detentor da obrigação subjacente.

Simultaneamente, será vendida a obrigação subjacente, detida desde a constituição da carteira, o que permitirá pagar o valor nominal ("X") da "obrigação de cupão zero" com vencimento nessa data, uma vez que $S_{ti+\varepsilon} \geq X$. Consequentemente, caso a opção de venda esteja "out-of-the-money" no momento "ti+ε", o valor da carteira será não negativo ($\pi_{ti+\varepsilon} \geq 0$).

Concluindo, como o valor futuro da carteira definida anteriormente é sempre não negativo ($\pi_{k,ti+\varepsilon} \geq 0$, k = t1, ..., ti), então o seu valor actual terá de ser não positivo de modo a que não seja possível obter margens de arbitragem:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -P_t + X.e^{-r[(ti+\varepsilon)-t]} - S_t + \sum_{k=t1}^{ti} J_k \cdot e^{-r(k-t)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_t \geq X.e^{-r[(ti+\varepsilon)-t]} - S_t + \sum_{k=t1}^{ti} J_k \cdot e^{-r(k-t)}$$

Como, por outro lado, o instante "ε" é infinitamente pequeno, então ele poderá ser desprezado

$$P_t \geq X.e^{-r(ti-t)} - S_t + \sum_{k=t1}^{ti} J_k \cdot e^{-r(k-t)},$$

ficando assim demonstrada a desigualdade (51).

No que diz respeito ao potencial de exercício antecipado associado a este tipo de opções "americanas" e tal como acontece para as opções de venda "sem cupões", constata-se que **a decisão mais racional do ponto de vista do detentor de uma opção de venda "americana" sobre obrigações que libertem cupões até à data de vencimento do contrato pode consistir no seu exercício antecipado**, desde que, estando a opção "in-the-money" e sendo desprezível a probabilidade de a cotação da obrigação subjacente ultrapassar o preço de exercício da opção, o juro associado à aplicação do preço de exercício da opção até à sua data de vencimento supere o *valor tempo* da "put" (que poderia ser obtido através da sua alienação) bem como o valor actual dos cupões vincendos entre a data de exercício da opção e a sua maturidade. Por outro lado, é também fácil de verificar que a probabilidade de exercício antecipado de uma opção de venda "com cupões" é inferior à associada a uma opção de venda "sem cupões", isto é, **quanto maior o número de cupões vincendos até à maturidade da opção menor será também a probabilidade de exercício antecipado de uma opção de venda sobre obrigações "com cupões" até à data de vencimento da opção.** Tal acontece na medida em que, um maior número de cupões libertos pela obrigação subjacente até à data de vencimento da opção faz aumentar o custo de oportunidade associado ao exercício antecipado da "put", pois uma vez entregue a obrigação subjacente deixar-se-à de receber tais cupões.

2.4.2.3. Opções sobre futuros

1) Limite superior de variação

- opções europeias: $\mathbf{p(F,X,T) \leq X.e^{-r\tau}}$ (52)

Com o intuito de demonstrar a veracidade da desigualdade (52), considere-se a seguinte estratégia de arbitragem, cujos fluxos financeiros estão discriminados no quadro abaixo exposto:

a) venda de uma opção de venda ("short put"); e

b) compra de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") com um valor nominal igual ao preço de exercício da opção e com uma data de vencimento igual à do contrato.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T	MOMENTO T
		Se $F_T \geq X$	*Se* $F_T < X$
Short put	$+p_t$	0	$-(X-F_T)$
Long OCZ	$-X.e^{-r\tau}$	$+X$	$+X$
$\pi =$	$+p_t-X.e^{-r\tau}$	$+X \geq 0$	$+F_T \geq 0$

Mediante a observação do quadro anterior, constata-se que o valor futuro da carteira definida é sempre não negativo ($\pi_T \geq 0$). De facto, se na data de vencimento da opção esta estiver "out-of-the-money" ($F_T \geq X$), então o seu comprador não a deverá exercer e portanto o valor da carteira resumir-se-à ao recebimento do valor nominal da "obrigação de cupão zero" ("X"). Caso contrário ($F_T < X$), a opção será exercida, transformando-se num contrato futuro com uma cotação inicial correspondente ao preço de exercício da opção e como $F_T < X$, então o resultado global do futuro será recebido pelo detentor da posição "curta" sobre o futuro, isto é, terá de ser pago ao comprador da opção de venda[101]. Todavia, o recebimento do valor nominal da "obrigação de cupão zero" faz com que o valor da carteira seja sempre igual à cotação do futuro na data de vencimento da opção.

Visto que $\pi_T \geq 0$ e se os mercados financeiros forem eficientes, então o valor actual da carteira terá de ser não positivo, isto é,

$$\pi \leq 0 \Leftrightarrow +p_t-X.e^{-r\tau} \leq 0 \Leftrightarrow p_t \leq X.e^{-r\tau}$$

[101] Se a maturidade do futuro subjacente coincidir com o vencimento da opção. Assim não sendo, só haverá lugar à liquidação do resultado caso seja assumida uma posição simétrica ao nível do mercado de futuros, pelo que o detentor da carteira em análise deverá vender um futuro à cotação F_T.

- opções americanas: $\mathbf{P(F,X,T) \leq X}$ (53)

O limite superior de variação das opções de venda "americanas" difere da restrição (52) uma vez que a estratégia de arbitragem definida anteriormente não se coaduna com a possibilidade de exercício antecipado destas opções. Na verdade, se o comprador da opção de venda optar pelo seu exercício imediato, o valor obtido através da alienação da "obrigação de cupão zero" pode não ser suficiente para cobrir a liquidação do resultado do futuro.

Deste modo, a carteira de arbitragem subjacente à condição (53) irá diferir somente em relação ao valor nominal da "obrigação de cupão zero" adquirida:
a) venda de uma opção de venda ("short put"); e
b) compra de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") de valor nominal "$X.e^{r\tau}$"[102] e maturidade "τ".

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	OPÇÃO EXERCIDA (momento ti: t< ti≤T)	OPÇÃO NÃO EXERCIDA (momento T)
Short put	$+P_t$	$-(X-F_{ti})$	0
Long OCZ	$-X.e^{r\tau}.e^{-r\tau} = -X$	$+X.e^{r(ti-t)}$	$+X.e^{r\tau}$
$\pi =$	$+P_t - X$	$F_{ti} + X.[e^{r(ti-t)}-1] \geq 0$	$X.e^{r\tau} \geq 0$

Assim, se a opção for exercida até à sua maturidade (isto é, em qualquer momento "ti" compreendido entre a data de constituição da carteira e o vencimento da "put") proceder-se-à à venda de um contrato futuro (com vista a anular a posição "longa" resultante do exercício da opção) e consequente pagamento do resultado global "$X-F_{ti}$", bem como à venda da "obrigação de cupão zero" detida por um valor necessariamente superior ao preço de exercício da opção ($X.e^{r(ti-t)} > X$), o qual mais do que compensará o resultado desfavorável do futuro. Se a opção não for exercida pelo seu comprador, então haverá apenas lugar ao recebimento do valor nominal da "obrigação de cupão zero" na sua data de vencimento (ou seja, no momento T). Em qualquer dos casos, o valor futuro da carteira é sempre não negativo ($\pi_{ti} \geq 0$, para $t < ti \leq T$) e portanto a inexistência de oportunidades de arbitragem requer a satisfação da seguinte condição:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow +P_t - X \leq 0 \Leftrightarrow P_t \leq X$$

---

[102] Desta forma, o valor da "obrigação de cupão zero" ao longo da duração da opção será sempre superior a "X".

2) Limite inferior de variação

- opções europeias: $\mathbf{p(F,X,T) \geq max\ [0, (X-F).e^{-r\tau}]}$ (54)

A desigualdade anterior estabelece que, em primeiro lugar, o prémio de uma opção de venda nunca pode ser negativo,

$$p(F,X,T) \geq 0,$$

isto é, terá sempre de ser pago pelo comprador do contrato.

Em segundo lugar (e se $(X-F).e^{-r\tau} > 0$), o valor da "put" deverá obedecer à condição $p(F,X,T) \geq (X-F).e^{-r\tau}$, pois se assim não for será possível desenvolver com sucesso a seguinte estratégia de arbitragem:

a) aquisição de uma opção de venda ("long put");

b) venda de uma "obrigação de cupão zero" ("short OCZ"), com uma maturidade "τ" e com um valor nominal igual à diferença entre o preço de exercício da opção e a cotação actual do futuro (isto é, "$X - F_t$"); e

c) compra, em cada dia "t+s" (s = 0,1, ...,τ-1) anterior à data de vencimento da opção, de "$e^{-r[T-(t+s+1)]}$" contratos futuros, para no dia seguinte ("t+s+1") esses mesmos contratos serem vendidos e o resultado gerado ($e^{-r[T-(t+s+1)]}.(F_{t+s+1}-F_{t+s})$) ser aplicado até à data de vencimento da opção mediante a compra de uma "obrigação de cupão zero" com maturidade "T-(t+s+1)" e de valor nominal $(F_{t+s+1}-F_{t+s})$. Estas operações recebem a designação de "long rollover futures" e asseguram a obtenção de um cash-flow "F_T-F_t" no momento "T", conforme a seguir se demonstra:

Momento	**Nº de futuros comprados**	**Resultado dos futuros**	**Compra de OCZ**	**Cash flow de cada período**
t	$e^{-r[T-(t+1)]}$			
t+1	$e^{-r[T-(t+2)]}$	$e^{-r[T-(t+1)]}.(F_{t+1}-F_t)$	$-e^{-r[T-(t+1)]}.(F_{t+1}-F_t)$	0
t+2	$e^{-r[T-(t+3)]}$	$e^{-r[T-(t+2)]}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	$-e^{-r[T-(t+2)]}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	0
...	...	...	...	...
t+s	$e^{-r[T-(t+s+1)]}$	$e^{-r[T-(t+s)]}.(F_{t+s}-F_{t+s-1})$	$-e^{-r[T-(t+s)]}.(F_{t+s}-F_{t+s-1})$	0
...	...	...	...	...
T-1	$e^{-r[T-(T)]} = 1$	$e^{-r[T-(T-1)]}.(F_{T-1}-F_{T-2})$	$-e^{-r}.(F_{T-1}-F_{T-2})$	0
T	0	$1.(F_T-F_{T-1})$	0	CF_T

O quadro anterior permite verificar que esta sucessão de operações apenas gera um fluxo financeiro, o qual ocorre somente no momento "T" (visto que em todos os momentos anteriores o resultado dos futuros foi canalizado para a aquisição de "obrigações de cupão zero"[103]). Por seu turno, o cash flow ocorrido no momento "T" (CF_T) corresponde não só

[103] Obviamente que, caso um dos resultados seja negativo, proceder-se-à ao seu financiamento mediante a venda de uma "obrigação de cupão zero".

ao resultado do contrato futuro desse período mas também ao recebimento do valor nominal das "obrigações de cupão zero" (OCZ) adquiridas nos momentos "t+s" (s = 1, ..., τ-1), ou seja,

$$CF_T = e^{-r[T-(t+1)]}.(F_{t+1}-F_t).e^{r[T-(t+1)]} + e^{-r[T-(t+2)]}.(F_{t+2}-F_{t+1}).e^{r[T-(t+2)]} + \ldots +$$

$$+ e^{-r}.(F_{T-1}-F_{T-2}).e^{r} + 1.(F_T-F_{T-1}) =$$

$$= (F_{t+1}-F_t) + (F_{t+2}-F_{t+1}) + \ldots + (F_{T-1}-F_{T-2}) + (F_T-F_{T-1}) = F_T - F_t$$

Deste modo, o quadro seguinte sintetiza os cash flows inerentes à estratégia de arbitragem definida anteriormente:

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

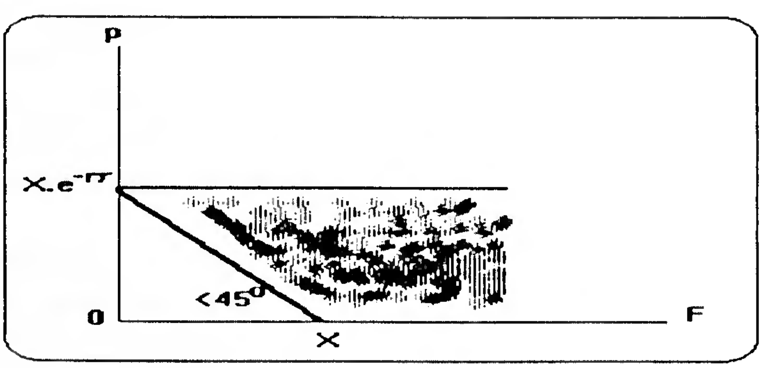
CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T *Se* $F_T \geq X$	MOMENTO T *Se* $F_T < X$
Long put	$-p_t$	0[104]	$+(X - F_T)$[105]
Short OCZ	$+(X-F_t).e^{-r\tau}$	$-(X - F_t)$[106]	$-(X - F_t)$[107]
Long rollover futures	0	$F_T - F_t$	$F_T - F_t$
$\pi =$	$-p_t + (X-F_t).e^{-r\tau}$	$F_T - X \geq 0$	0

Verifica-se assim que $\pi_T \geq 0$, pelo que

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -p_t + (X-F_t).e^{-r\tau} \leq 0 \Leftrightarrow p_t \geq (X-F_t).e^{-r\tau}$$

O gráfico XX representa o intervalo de variação do valor de uma opção de venda "americana" sobre futuros, o qual resulta da conjunção das condições (52) e (54).

Gráfico XX



[104] A opção não é exercida.
[105] A opção é exercida.
[106] Reembolso do valor nominal da "obrigação de cupão zero".
[107] Idem.

- opções americanas: $\mathbf{P(F,X,T) \geq max\ [0, X\text{-}F]}$ (55)

Tal como para qualquer tipo de opção, o pagamento do seu prémio cabe à entidade que beneficia do direito de exercício (o comprador da opção), razão pela qual $P(F,X,T) \geq 0$.

Quanto à condição $P(F,X,T) \geq X\text{-}F$, a sua verificação impede a obtenção de ganhos de arbitragem mediante a prossecução da seguinte estratégia:

a) aquisição de uma opção de venda ("long put"); e

b) imediato exercício da mesma, acompanhado pela compra simultânea de um contrato futuro ("long future"). Deste modo, através do exercício da opção obtém-se uma posição "curta" sobre um contrato futuro com uma cotação inicial igual ao preço de exercício da opção, a qual é logo anulada via realização de uma operação simétrica, possibilitando assim a obtenção do resultado do futuro.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t
Long put	$-P_t$
Exercício e long future	$X - F_t$
$\pi_t =$	$-P_t + X - F_t$

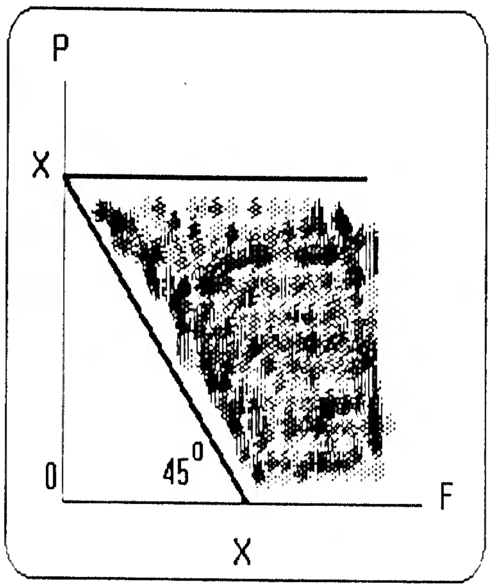
Na verdade, para que a estratégia definida anteriormente não proporcione um lucro sem risco, é necessário que

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -P_t + X - F_t \leq 0 \Leftrightarrow P_t \geq X - F_t$$

Note-se que a restrição (54) também é aplicável às opções de venda "americanas", pois como a "put" associada à estratégia de arbitragem justificativa de tal restrição é adquirida, então é possível assegurar que o seu exercício apenas ocorrerá na sua data de vencimento. Todavia, o limite inferior de variação estabelecido pela condição (55) é mais restritivo, na medida em que $X\text{-}F \geq (X\text{-}F).e^{-r\tau}$.

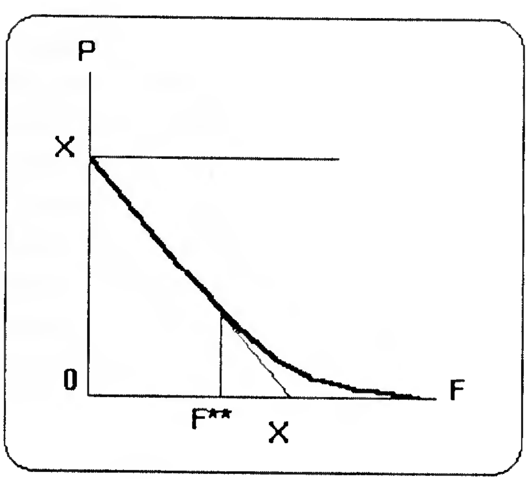
Combinando as desigualdades (53) e (55), obtém-se o intervalo de variação do valor de uma opção de venda "americana" sobre futuros, o qual é representado pela área sombreada do gráfico XXI.

Gráfico XXI



Comparando os gráficos XX e XXI, verifica-se que o valor de uma "put americana" sobre futuros está acima do prémio associado às suas homólogas europeias, particularmente para níveis reduzidos da cotação do futuro subjacente. Tal acontece em virtude do potencial de exercício antecipado inerente às opções de venda "americanas" para níveis reduzidos de "F", pois para cotações do futuro subjacente abaixo de um determinado limiar mínimo (designado por "F**" no gráfico XXII) a probabilidade de ocorrência de novas descidas de "F" torna-se insignificante, o *valor tempo* da opção tende para zero e, consequentemente, o prémio da opção reduz-se ao seu *valor intrínseco.*

Gráfico XXII



Deste modo, **para níveis suficientemente baixos da cotação do futuro subjacente** (ou seja, para F < F**) **pode haver lugar ao exercício antecipado de opções de venda "americanas" sobre futuros de TDP/LP**, com vista ao aproveitamento do rendimento proporcionado pela aplicação do resultado do futuro até à maturidade da opção: $(X-F_t).[e^{r\tau}-1]$.

2.5. Teoremas de paridade "put-call"

A denominada paridade "put-call" consiste na relação existente entre os valores das opções de compra e de venda ("europeias" ou "americanas") sobre idêntico activo subjacente, de forma a inviabilizar o aproveitamento de oportunidades de arbitragem.

O seu interesse reside no facto de, uma vez conhecido o modelo de avaliação de um determinado tipo de opções de compra, a aplicação da paridade "put-call" permitir obter imediatamente a fórmula aplicável às correspondentes opções de venda[108]. Deste modo, os resultados obtidos neste ponto do trabalho serão utilizados aquando da avaliação de opções.

2.5.1. Opções "on the spot" sem cupões

2.5.1.1. Opções europeias

Paridade "put-call": $\mathbf{c(S,X,T) - p(S,X,T) = S - X.e^{-r\tau}}$ (56)

A igualdade (56) resulta da necessidade de inviabilização de duas estratégias de arbitragem alternativas. Considere-se a primeira estratégia, cujos cash flows se discriminam no quadro abaixo exposto:
a) aquisição de uma opção de compra ("long call");
b) venda de uma opção de venda ("short put");
c) venda da obrigação subjacente ("short asset"); e
d) compra de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") com um valor nominal igual ao preço de exercício das opções e com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para a data de vencimento dos contratos.

[108]Em boa verdade, este procedimento apenas é directamente aplicável às opções "europeias", pois a paridade "put-call" só é dada sob a forma de uma igualdade para este tipo de opções (a paridade "put-call" para opções de tipo "americano" consiste sempre na combinação de duas desigualdades). Dito de outro modo, enquanto que para as opções "europeias" a inexistência de oportunidades de arbitragem implica que para cada valor da "call" haja um único valor admissível para a correspondente "put", já para as opções de tipo "americano" existe um intervalo de valores no qual os valores das "call" e "put" podem variar sem gerar oportunidades de arbitragem. Tal acontece pois, conforme se irá constatar, as estratégias de arbitragem associadas às paridades "put-call" para opções "americanas" envolvem sempre a venda de uma opção em relação à qual se coloca o problema do seu exercício antecipado.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM N°1

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T *Se* $S_T > X$	MOMENTO T *Se* $S_T \leq X$
Long call	$-c_t$	$+(S_T - X)$	0
Short put	$+p_t$	0	$-(X - S_T)$
Short asset	$+S_t$	$-S_T$	$-S_T$
Long OCZ	$-X.e^{-r\tau}$	$+X$	$+X$
$\pi =$	$- c_t + p_t + S_t - X.e^{-r\tau}$	0	0

Constata-se que o valor futuro da carteira definida anteriormente é nulo ($\pi_T = 0$), pelo que o valor actual da carteira terá de ser não positivo de modo a que a estratégia n°1 não permita a obtenção de um lucro sem risco:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow - c_t + p_t + S_t - X.e^{-r\tau} \leq 0$$

Por outro lado, observem-se os fluxos financeiros associados a uma estratégia de arbitragem de sentido exactamente oposto à anterior:
a) venda de uma opção de compra ("short call");
b) compra de uma opção de venda ("long put");
c) aquisição da obrigação subjacente ("long asset"); e
d) venda de uma "obrigação de cupão zero" ("short OCZ") com um valor nominal igual ao preço de exercício das opções e com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para a data de vencimento dos contratos.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM N°2

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T *Se* $S_T > X$	MOMENTO T *Se* $S_T \leq X$
Short call	$+c_t$	$-(S_T - X)$	0
Long put	$-p_t$	0	$+(X - S_T)$
Long asset	$-S_t$	$+S_T$	$+S_T$
Short OCZ	$+X.e^{-r\tau}$	$-X$	$-X$
$\pi =$	$+ c_t - p_t - S_t + X.e^{-r\tau}$	0	0

Novamente, o valor futuro da carteira n°2 é nulo ($\pi_T = 0$) e portanto a positividade do seu valor actual equivaleria à obtenção de um ganho de arbitragem, donde:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow + c_t - p_t - S_t + X.e^{-r\tau} \leq 0$$

Combinando as duas restrições anteriores,

$$- c_t + p_t + S_t - X.e^{-r\tau} \leq 0 \ \wedge \ + c_t - p_t - S_t + X.e^{-r\tau} \leq 0 \ \Leftrightarrow$$
$$+ c_t - p_t - S_t + X.e^{-r\tau} \geq 0 \ \wedge \ + c_t - p_t - S_t + X.e^{-r\tau} \leq 0 \ \Rightarrow$$

conclui-se que

$$\Rightarrow \ + c_t - p_t - S_t + X.e^{-r\tau} = 0 \ \Leftrightarrow \ c(S,X,T) - p(S,X,T) = S - X.e^{-r\tau}$$

2.5.1.2. Opções americanas

Paridade "put-call": $\mathbf{S - X.e^{-r\tau} \geq C(S,X,T) - P(S,X,T) \geq S - X}$ (57)

A proposição (57) envolve a conjunção de duas desigualdades cuja demonstração radica em diferentes estratégias de arbitragem.

Quanto à condição $S - X.e^{-r\tau} - C(S,X,T) + P(S,X,T) \geq 0$, a sua verificação decorre da consideração da seguinte carteira de arbitragem:
a) compra de uma obrigação subjacente ("long asset");
b) venda de uma "obrigação de cupão zero" ("short OCZ") com um valor nominal igual ao preço de exercício das opções e com uma maturidade idêntica ao tempo em falta para o vencimento dos contratos;
c) venda de uma opção de compra ("short call"); e
d) compra de uma opção de venda ("long put").

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO ti (ti: t<ti<T)[109]	MOMENTO T[110]	MOMENTO T[111]
			Se $S_T > X$	*Se* $S_T \leq X$
Long asset	$-S_t$	$+S_{ti}$	$+S_T$	$+S_T$
Short OCZ	$+X.e^{-r\tau}$	$-X.e^{-r\tau}.e^{r(ti-t)} = -X.e^{-r(T-ti)}$	$-X$	$-X$
Short call	$+C_t$	$-(S_{ti} - X)$	$-(S_T - X)$	0
Long put	$-P_t$	$+P_{ti}(VT)$	0	$+(X - S_T)$
$\pi =$	$-S_t+X.e^{-r\tau}+C_t-P_t$	$+P_{ti}(VT) +X.[1-e^{-r(T-ti)}] \geq 0$	0	0

[109] No caso de a "call" ser exercida antecipadamente pelo seu detentor.
[110] Caso contrário.
[111] Idem.

O quadro anterior mostra que o valor futuro da carteira definida é sempre não negativo ($\pi_{ti,T} \geq 0$). Com efeito, se a "call" for exercida antecipadamente[112] (ou seja, em qualquer momento anterior à sua data de vencimento), proceder-se-à à liquidação física do contrato mediante a entrega da obrigação subjacente adquirida no momento "t" e com o preço de exercício recebido adquire-se uma "obrigação de cupão zero", com um valor nominal de "X" e maturidade igual ao tempo em falta para o vencimento dos contratos ("T-ti")[113], ficando ainda o detentor da carteira com um excedente financeiro de "$X.[1-e^{-r(T-ti)}]$". Mais ainda, a "put" detida será também vendida proporcionando um encaixe financeiro equivalente ao seu *valor tempo* (pois, a "call" só será exercida se estiver "in-the-money", situação na qual a correspondente "put" estará necessariamente "out-of-the-money"). Em suma, $\pi_{ti} \geq 0$. No caso de a opção de compra não ser exercida antecipadamente, a estratégia de arbitragem apenas proporcionará fluxos financeiros na maturidade dos contratos, sendo o valor da carteira sempre nulo ($\pi_T = 0$). Se $S_T > X$, a opção de venda não terá qualquer valor e a "call" deverá ser exercida pelo seu detentor. Para a liquidação física da opção de compra será utilizada a obrigação subjacente possuída, sendo o preço de exercício recebido canalizado para o reembolso do valor nominal da "obrigação de cupão zero" alienada no momento "t". Na hipótese oposta ($S_T \leq X$), o detentor da carteira exercerá a opção de venda mediante a entrega da obrigação subjacente, sendo, novamente, o preço de exercício recebido utilizado para o pagamento do valor nominal da "obrigação de cupão zero".

Concluindo, como $\pi_{ti,T} \geq 0$, então

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -S_t+X.e^{-r\tau}+C_t-P_t \leq 0 \Leftrightarrow S - X.e^{-r\tau} - C(S,X,T) + P(S,X,T) \geq 0$$

Relativamente à condição $C(S,X,T) - P(S,X,T) - S + X \geq 0$, a sua verificação impõe-se por forma a inviabilizar a prossecução de uma estratégia de arbitragem de sentido oposto ao descrito anteriormente:

a) aquisição de uma opção de compra ("long call");

b) alienação de uma opção de venda ("short put");

c) venda de uma obrigação subjacente ("short asset"); e

d) compra de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") com maturidade "τ" e valor nominal "$X.e^{r\tau}$".

---

112 No ponto 2.4.1.1 constatou-se que não se afigura como a estratégia mais racional o exercício antecipado de uma opção de compra "americana" sobre uma obrigação que não liberte cash-flows até à data de vencimento do contrato (visto a venda da "call" revelar-se mais rentável), razão pela qual bastaria considerar os fluxos financeiros da estratégia de arbitragem no momento "T". Mesmo assim e como, na prática, nem sempre a conduta dos agentes económicos é guiada por critérios estritos de racionalidade económica, convém ter em conta todas as possibilidades ao dispor do detentor da opção.

113 Na data de vencimento das opções, o recebimento do valor nominal da "obrigação de cupão zero" adquirida no momento "ti" servirá exactamente para reembolsar a sua congénere vendida no momento "t". Em alternativa, como a venda da "obrigação de cupão zero" no momento "t" equivale à contracção de um financiamento no valor de "$X.e^{-r\tau}$", o fluxo financeiro "$X.e^{-r\tau}.e^{r(ti-t)}$" pago no momento "ti" corresponde ao reembolso do capital e dos juros (para o prazo "ti-t") associados a tal empréstimo.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO ti[114] (ti: t<ti<T)	MOMENTO T[115]	MOMENTO T[116]
			Se $S_T > X$	*Se* $S_T \leq X$
Long call	$-C_t$	$+C_{ti}(VT)$	$+(S_T - X)$	0
Short put	$+P_t$	$-(X - S_{ti})$	0	$-(X - S_T)$
Short asset	$+S_t$	$-S_{ti}$	$-S_T$	$-S_T$
Long OCZ	$-X.e^{r\tau}.e^{-r\tau} = -X$	$+X.e^{r(ti-t)}$	$+X.e^{r\tau}$	$+X.e^{r\tau}$
$\pi =$	$-C_t+P_t+S_t-X$	$+C_{ti}(VT)$ $+X.[e^{r(ti-t)}-1] \geq 0$	$+X.[e^{r\tau}-1] \geq 0$	$+X.[e^{r\tau}-1] \geq 0$

Na verdade, se o detentor da "put" optar pelo seu exercício antecipado[117] o valor da carteira será não negativo ($\pi_{ti} \geq 0$), pois a obrigação subjacente recebida anulará a posição "curta" sobre ela existente desde o momento "t", o preço de exercício será pago através da venda da "obrigação de cupão zero" em carteira[118] (gerando um excedente financeiro de "$X.[e^{r(ti-t)}-1]$") e proceder-se-à à venda da "call" donde resultará a obtenção do seu *valor tempo* (dado o seu *valor intrínseco* ser nulo para $S_{ti} \leq X$). Por outro lado, no caso de a opção de venda não ser exercida antecipadamente então o valor futuro (isto é, o valor no momento "T", único período de ocorrência de cash flows) da carteira será também não negativo ($\pi_T \geq 0$). Isto porque, seja exercida a opção de compra (se $S_T > X$) ou a opção de venda (se $S_T \leq X$), haverá sempre lugar ao recebimento da obrigação subjacente e portanto à anulação da posição "curta" detida desde o momento "t", podendo o preço de exercício ser sempre pago através do recebimento do valor nominal da "obrigação de cupão zero", visto que $X.e^{r\tau} \geq X$.

Mais uma vez, como $\pi_{ti,T} \geq 0$ então

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -C_t+P_t+S_t-X \leq 0 \Leftrightarrow C(S,X,T) - P(S,X,T) - S + X \geq 0$$

[114] No caso de a "put" ser exercida antecipadamente pelo seu detentor.
[115] Se não houver lugar ao exercício antecipado da opção de venda.
[116] Idem.
[117] Estratégia perfeitamente admissível para cotações suficientemente reduzidas da obrigação subjacente (vide quesito 2.4.2.1.).
[118] Ou seja, através do recebimento do valor acumulado associado à aplicação financeira realizada no momento "t", pelo valor "X" e à taxa de juro "r".

2.5.2. Opções "on the spot" com cupões.

2.5.2.1. Opções europeias

Paridade "put-call": $c(S,X,T) - p(S,X,T) = S - I - X.e^{-r\tau}$ (58)

sendo,

I ≡ valor actual (isto é, no momento "t") dos cupões vincendos até ao momento "T", ou seja,

$$I = \sum_{k=t1}^{tu} J_k \times e^{-r(k-t)}, \text{ em que}$$

J_k ≡ cupão gerado pela obrigação no momento "k"; e
k ≡ data de geração do k-ésimo cupão, com t < t1 e T > tu.

Tal como acontece para as opções "europeias" sobre obrigações que não geram cupões até à maturidade dos contratos, a paridade "put-call" para opções "europeias" sobre obrigações que libertam cash flows durante a vigência dos contratos também resulta da necessidade de não lucratividade de duas estratégias de arbitragem exactamente simétricas.

A primeira, designada por estratégia de arbitragem n°1, consiste em:
a) adquirir uma opção de compra ("long call");
b) vender uma opção de venda ("short put");
c) vender a obrigação subjacente ("short asset");
d) comprar tantas "obrigações de cupão zero" ("long OCZ's") quantos os cupões gerados até à maturidade da opção ("u" títulos), com um valor nominal igual ao valor do cupão vincendo ("J_k", com k = t1, ..., tu) e com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento de cada cupão ("k-t", com k = t1, ...,tu); e
e) adquirir uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") cujo valor nominal seja igual ao preço de exercício das opções e com uma maturidade idêntica ao tempo em falta até ao vencimento dos contratos.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM N°1

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO k	MOMENTO T	MOMENTO T
			Se $S_T > X$	*Se* $S_T \leq X$
Long call	$-c_t$		$+(S_T - X)$	0
Short put	$+p_t$		0	$-(X - S_T)$
Short asset	$+S_t$	$-J_k$	$-S_T$	$-S_T$
Long OCZ's	-I	$+J_k.e^{-r(k-t)}.e^{r(k-t)} = +J_k$		
Long OCZ	$-X.e^{-r\tau}$		$+X.e^{-r\tau}.e^{r(T-t)} = +X$	$+X$
$\pi =$	$-c_t+p_t+S_t-I - X.e^{-r\tau}$	0	0	0

De acordo com o quadro anterior, o valor futuro da carteira em análise é sempre igual a zero. Em cada período de capitalização da obrigação subjacente (momento k, com k = t1, ..., tu), a perda do cupão ("J_k") resultante da venda dessa mesma obrigação é exactamente compensada pelo recebimento de um fluxo financeiro equivalente proveniente do reembolso do valor nominal de uma "obrigação de cupão zero" (adquirida no momento "t" por "$J_k.e^{-r(k-t)}$"), pelo que $\pi_k = 0$ (para k = t1, ..., tu). No momento "T", seja exercida a opção de compra (se $S_T > X$) ou a opção de venda (se $S_T \leq X$), haverá sempre que despender o preço de exercício através do recebimento do valor nominal da "obrigação de cupão zero" comprada no momento "t" por "$X.e^{-r\tau}$" e, em contrapartida, será obtida uma obrigação subjacente, a qual permitirá compensar a posição "curta" detida desde o momento "t" sobre tal activo. Deste modo, $\pi_T = 0$.

Portanto, uma vez que $\pi_{k,T} = 0$, o valor actual da carteira terá de ser não positivo para que não seja possível obter ganhos sem risco:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -c_t+p_t+S_t-I -X.e^{-r\tau} \leq 0.$$

A estratégia de arbitragem n°2 assenta numa carteira de sinal contrário ao definido para a primeira estratégia, isto é, passa pela:

a) venda de uma opção de compra ("short call");

b) compra de uma opção de venda ("long put");

c) aquisição de uma obrigação subjacente ("long asset");

d) venda de tantas "obrigações de cupão zero" ("short OCZ's") quantos os cupões gerados até à maturidade da opção ("u" títulos), com um valor nominal igual ao valor do cupão vincendo ("J_k", com k = t1, ..., tu) e com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento de cada cupão ("k-t", com k = t1, ...,tu); e

e) venda de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") cujo valor nominal seja igual ao preço de exercício das opções e com uma maturidade idêntica ao tempo em falta até ao vencimento dos contratos.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM Nº2

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO k	MOMENTO T	MOMENTO T
			Se $S_T > X$	*Se* $S_T \leq X$
Short call	$+c_t$		$-(S_T - X)$	0
Long put	$-p_t$		0	$+(X - S_T)$
Long asset	$-S_t$	$+J_k$	$+S_T$	$+S_T$
Short OCZ's	$+I$	$-J_k.e^{-r(k-t)}.e^{r(k-t)} = -J_k$		
Short OCZ	$+X.e^{-r\tau}$		$-X.e^{-r\tau}.e^{r(T-t)} = -X$	$-X$
$\pi =$	$+c_t-p_t-S_t+I +X.e^{-r\tau}$	0	0	0

Tal como na estratégia anterior, o valor futuro da carteira de arbitragem é nulo. Até à maturidade das opções, os cupões provenientes da obrigação subjacente detida são utilizados para amortizar o valor nominal da correspondente "obrigação de cupão zero" vendida no momento "t", donde $\pi_k = 0$ (para k = t1, ..., tu). Na data de vencimento das opções, o exercício da "call" (se $S_T > X$) ou da "put" (caso $S_T \leq X$) dará origem à entrega da obrigação subjacente em carteira contra o recebimento do respectivo preço de exercício, o qual permitirá reembolsar o valor nominal da "obrigação de cupão zero" vendida no momento "t" por "$X.e^{-r\tau}$". Consequentemente, $\pi_T = 0$.

Sendo $\pi_{k.T} = 0$, torna-se necessário que:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow +c_t-p_t-S_t+I +X.e^{-r\tau} \leq 0.$$

Combinando as condições resultantes das duas estratégias de arbitragem estudadas,

$$-c_t+p_t+S_t-I -X.e^{-r\tau} \leq 0 \ \wedge \ +c_t-p_t-S_t+I +X.e^{-r\tau} \leq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$+c_t-p_t-S_t+I +X.e^{-r\tau} \geq 0 \ \wedge \ +c_t-p_t-S_t+I +X.e^{-r\tau} \leq 0 \ \Rightarrow$$

conclui-se que

$$\Rightarrow \ +c_t-p_t-S_t+I +X.e^{-r\tau} = 0 \ \Leftrightarrow \ c(S,X,T) - P(S,X,T) = S - I - X.e^{-r\tau}$$

2.5.2.2. Opções americanas

Paridade "put-call": $S - X.e^{-r\tau} \geq C(S,X,T) - P(S,X,T) \geq S - I - X$ (59)

sendo,

$I \equiv$ valor actual dos cupões vincendos até ao momento "T", ou seja,

$$I = \sum_{k=t1}^{tu} J_k \times e^{-r(k-t)},\ \text{em que}$$

$J_k \equiv$ cupão gerado pela obrigação no momento "k"; e
$k \equiv$ data de geração do k-ésimo cupão, com $t < t1$ e $T > tu$.

A primeira desigualdade implícita na condição (59), $S\text{-}X.e^{-r\tau} \geq C(S,X,T)\text{-}P(S,X,T)$, deriva da estratégia de arbitragem assente na:

a) compra de uma obrigação subjacente ("long asset");

b) venda de uma "obrigação de cupão zero" ("short OCZ") com um valor nominal igual ao preço de exercício das opções e com uma maturidade idêntica ao tempo em falta para o vencimento dos contratos;

c) venda de uma opção de compra ("short call"); e

d) compra de uma opção de venda ("long put").

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO k (k = t1, ..., tu)		MOMENTO T[119]	
		com exercício da call	*s/ exercício da call*	*Se $S_T > X$*	*Se $S_T \leq X$*
Long asset	$-S_t$	$+S_k$	$+J_k$	$+S_T$	$+S_T$
Short OCZ	$+X.e^{-r\tau}$	$-X.e^{-r\tau}.e^{r(k-t)} = -X.e^{-r(T-k)}$		$-X$	$-X$
Short call	$+C_t$	$-(S_k - X)$		$-(S_T - X)$	0
Long put	$-P_t$	$+P_k(VT)$		0	$+(X - S_T)$
$\pi =$	$-S_t+X.e^{-r\tau}+C_t-P_t$	$+P_k(VT) + X.[1-e^{-r(T-k)}] \geq 0$	$+J_k \geq 0$	0	0

[119] No caso de a opção de compra não ter sido exercida antecipadamente.

Como a carteira de arbitragem envolve a venda de uma "american call" e sabendo-se que o exercício antecipado de uma opção de compra "americana" sobre obrigações que libertem cash flows até à data de vencimento do contrato apenas poderá ser vantajoso nas datas de vencimento dos cupões, então basta considerar o valor futuro da carteira nessas mesmas datas de capitalização da obrigação subjacente (momentos k, com k = t1, ..., tu) e na maturidade das opções (momento "T"). Assim, se a "call" for exercida antes da sua maturidade (ou seja, aquando do vencimento de um qualquer cupão), proceder-se-á à liquidação física do contrato mediante a entrega da obrigação subjacente em carteira, utilizar-se-á uma parte do preço de exercício recebido para adquirir uma "obrigação de cupão zero" de valor nominal "X" e maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento da "put"[120](ainda sobrando "$X.[1-e^{-r(T-k)}]$") e obter-se-á o *valor tempo* da opção de venda detida através da sua alienação. Caso não haja lugar ao exercício antecipado da opção de compra, então a carteira constituída libertará, em cada momento "k" (k = t1, ..., tu), um fluxo financeiro positivo correspondente ao cupão vencido pela obrigação subjacente. Em qualquer dos casos, o valor futuro da carteira antes do momento "T" será sempre não negativo ($\pi_k \geq 0$, para k = t1, ..., tu). Por outro lado e mesmo que não se tenha verificado o exercício antecipado da "call", o valor da carteira no momento "T" será sempre igual a zero ($\pi_T = 0$) pois, seja $S_T > X$ ou $S_T \leq X$, o correspondente exercício da "call" ou da "put" dará sempre lugar à liquidação física do contrato via entrega da obrigação subjacente detida e à amortização do valor nominal da "obrigação de cupão zero" vendida no momento "t" através do recebimento do preço de exercício.

Em síntese, $\pi_{k,T} \geq 0$, pelo que

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -S_t+X.e^{-r\tau}+C_t-P_t \leq 0 \Leftrightarrow S-X.e^{-r\tau} \geq C(S,X,T)-P(S,X,T)$$

Para demonstrar a segunda condição subjacente à desigualdade (59), C(S,X,T) - P(S,X,T) ≥ S - I - X considere-se a seguinte estratégia de arbitragem:

a) aquisição de uma opção de compra ("long call");

b) venda de uma opção de venda ("short put");

c) venda de uma obrigação subjacente ("short asset");

d) compra de tantas "obrigações de cupão zero" ("long OCZ's") quantos os cupões gerados até à maturidade da opção ("u" títulos), com um valor nominal igual ao valor do cupão vincendo ("J_k", com k = t1, ..., tu) e com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento de cada cupão ("k-t", com k = t1, ...,tu); e

e) aquisição de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") cujo valor nominal seja igual a "$X.e^{r\tau}$" e com uma maturidade idêntica ao tempo em falta até ao vencimento dos contratos.

---

[120]Deste modo, no momento "T" haverá lugar ao recebimento do valor nominal deste título ("X"), o qual permitirá amortizar o valor nominal da "obrigação de cupão zero" vendida no momento "t". Visto por outro prisma, no momento "k" procede-se ao reembolso do capital e dos juros ("$X.e^{-r\tau}.e^{r(k-t)}$") associados ao financiamento contraído no momento "t" e no valor de "$X.e^{-r\tau}$".

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	COM EXERCÍCIO DA PUT	SEM EXERCÍCIO DA PUT	MOMENTO T[121]	
		momento t*: $t < t^* < T$	momento k ($k = t1, \ldots, tu$)	*Se* $S_T > X$	*Se* $S_T \leq X$
Long call	$-C_t$	$+C_{t^*}(VT)$		$+(S_T - X)$	0
Short put	$+P_t$	$-(X - S_{t^*})$		0	$-(X-S_T)$
Short asset	$+S_t$	$-S_{t^*}$	$-J_k$	$-S_T$	$-S_T$
Long OCZ's	$-I$	$+ \sum_{\substack{k=t1 \\ k>t^*}}^{tu} J_k \cdot e^{-r(k-t)} \cdot e^{r(t^*-t)}$	$+J_k . e^{-r(k-t)} . e^{r(k-t)} = +J_k$		
Long OCZ	$-X$	$+X.e^{(t^*-t)}$		$+X.e^{r\tau}$	$+X.e^{r\tau}$
$\pi =$	$-C_t+P_t+S_t-I-X$	$+C_{t^*}(VT) +X.[e^{(t^*-t)}-1] + \sum_{\substack{k=t1 \\ k>t^*}}^{tu} J_k \cdot e^{-r(k-t^*)} \geq 0$	0	$+X.[e^{r\tau}-1] \geq 0$	$+X.[e^{r\tau}-1] \geq 0$

Uma vez que a carteira de arbitragem considerada engloba a venda de uma opção de venda "americana" (sobre uma obrigação que liberta cash flows até à data de vencimento do contrato) e como o exercício antecipado deste tipo de opções poderá ser desencadeado pelo seu detentor[122], é necessário ter em conta o valor futuro da carteira para esse mesmo cenário. Então, se houver lugar ao exercício antecipado da "put" (num qualquer momento "t*" situado entre a data de avaliação e a maturidade dos contratos), o consequente recebimento da obrigação subjacente permitirá anular a posição "curta" detida sobre esse mesmo activo, uma parcela do produto da venda da "obrigação de cupão zero" adquirida no momento "t" pelo valor "X" possibilitará o pagamento do preço de exercício da opção (ainda restando um valor de "$X.[e^{(t^*-t)}-1]$"), proceder-se-á à venda das "obrigações de cupão zero" associadas aos cupões com vencimento posterior ao momento de exercício (momento "t*") e, por último, receber-se-à o *valor tempo* da opção de compra através da sua alienação. Concluindo, caso a "put" seja exercida antecipadamente, o valor futuro da carteira será não negativo ($\pi_{t^*} \geq 0$, para $t < t^* < T$). Na hipótese contrária (ou seja, de não

[121] Caso não tenha havido lugar ao exercício antecipado da opção de venda.
[122] Vide ponto 2.4.2.2.

exercício antecipado da opção de venda), o valor futuro da carteira será necessariamente nulo até à data de vencimento dos contratos ($\pi_k = 0$, para k = t1, ..., tu), dado que a perda dos cupões gerados pela obrigação subjacente vendida é exactamente compensada pelo recebimento do valor nominal da correspondente "obrigação de cupão zero" adquirida no momento "t". Na data de vencimento dos contratos e se a "put" não tiver sido objecto de exercício antecipado, o valor da carteira será sempre não negativo ($\pi_T \geq 0$) pois, seja exercida a "call" (se $S_T > X$) ou a "put" (caso $S_T \leq X$), a posição "curta" assumida sobre a obrigação subjacente será sempre anulada através da obtenção de tal activo e o reembolso do valor nominal da "obrigação de cupão zero" com maturidade "τ" mais do que permitirá pagar o preço de exercício (resultando ainda um excedente financeiro no valor dos juros proporcionados por este último título, "$X.[e^{r\tau}-1]$").

Daqui resulta que, sendo o valor futuro da carteira sempre não negativo, então o seu valor actual terá de ser não positivo, pois de outro modo haveria lugar à obtenção de margens de arbitragem:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -C_t+P_t+S_t-I-X \leq 0 \Leftrightarrow C(S,X,T) - P(S,X,T) \geq S - I - X.$$

2.5.3. Opções sobre futuros.

2.5.3.1. Opções europeias

Paridade "put-call": $$\mathbf{c(F,X,T) - p(F,X,T) = (F - X).e^{-r\tau}} \qquad (60)$$

A não verificação da restrição (60) possibilitaria a obtenção de lucros sem risco através da prossecução de uma de entre duas estratégias de arbitragem alternativas e exactamente simétricas.

Em primeiro lugar, analise-se a carteira associada à estratégia de arbitragem que seria potenciada pela verificação da relação "$c(F,X,T) - p(F,X,T) > (F - X).e^{-r\tau}$":

a) venda de uma opção de compra ("short call");

b) compra de uma opção de venda ("long put");

c) aquisição de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento dos contratos e com um valor nominal igual à diferença entre a cotação actual do futuro e o preço de exercício das opções (F_t- X); e

d) compra, em cada dia "t+s" (s = 0,1, ...,τ-1) anterior à data de vencimento das opções, de "$e^{-r[T-(t+s+1)]}$" contratos futuros, para no dia seguinte ("t+s+1") esses mesmos contratos serem vendidos e o resultado gerado ($e^{-r[T-(t+s+1)]}.(F_{t+s+1}-F_{t+s})$) ser aplicado (se positivo, ou financiado, caso seja negativo) até à data de vencimento dos contratos mediante a compra (ou venda) de uma "obrigação de cupão zero" com maturidade "T-(t+s+1)" e de valor nominal (F_{t+s+1}-F_{t+s}). Estas operações recebem a designação de "long rollover futures" e asseguram a obtenção de apenas um cash flow "F_T-F_t" no momento "T", conforme foi demonstrado no ponto 2.4.2.3.

<u>ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM</u>

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T *Se* $F_T < X$	MOMENTO T *Se* $F_T \geq X$
Short call	$+c_t$	0	$-(F_T - X)$
Long put	$-p_t$	$+(X - F_T)$	0
Long OCZ	$-(F_t - X).e^{-r\tau}$	$+(F_t - X)$	$+(F_t - X)$
Long rollover futures	0	$F_T - F_t$	$F_T - F_t$
$\pi =$	$+c_t-p_t-(F_t - X).e^{-r\tau}$	0	0

Visto o valor futuro da carteira ser sempre nulo ($\pi_T = 0$), a inexistência de ganhos de arbitragem requer então que o seu valor actual seja não positivo:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow +c_t-p_t-(F_t - X).e^{-r\tau} \leq 0 \Leftrightarrow +c_t-p_t \leq (F_t - X).e^{-r\tau}.$$

Por outro lado, a verificação da relação "$c(F,X,T) - p(F,X,T) < (F - X).e^{-r\tau}$" também possibilitaria a obtenção de margens de arbitragem, bastando para tal o desenvolvimento da estratégia oposta à delineada anteriormente:

a) compra de uma opção de compra ("long call");

b) alienação de uma opção de venda ("short put");

c) venda de uma "obrigação de cupão zero" ("short OCZ") com uma maturidade correspondente ao tempo em falta para o vencimento dos contratos e com um valor nominal igual à diferença entre a cotação actual do futuro e o preço de exercício das opções (F_t- X); e

d) venda, em cada dia "t+s" (s = 0,1, ...,τ-1) anterior à data de vencimento das opções, de "$e^{-r[T-(t+s+1)]}$" contratos futuros, para no dia seguinte ("t+s+1") esses mesmos contratos serem comprados e o resultado gerado ($-e^{-r[T-(t+s+1)]}.(F_{t+s+1}-F_{t+s})$) ser financiado (se for negativo, ou aplicado, se for positivo) até à data de vencimento dos contratos mediante a venda (ou compra) de uma "obrigação de cupão zero" com maturidade "T-(t+s+1)" e de valor nominal (F_{t+s+1}-F_{t+s}). Estas operações recebem a designação de "short rollover futures" e asseguram a obtenção de um cash flow "-(F_T-F_t)" no momento "T", conforme foi demonstrado no ponto 2.4.1.3.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T	MOMENTO T
		Se $F_T < X$	*Se* $F_T \geq X$
Long call	$-c_t$	0	$+(F_T - X)$
Short put	$+p_t$	$-(X - F_T)$	0
Short OCZ	$+(F_t - X).e^{-r\tau}$	$-(F_t - X)$	$-(F_t - X)$
Short rollover futures	0	$-(F_T - F_t)$	$-(F_T - F_t)$
$\pi =$	$-c_t+p_t+(F_t - X).e^{-r\tau}$	0	0

Na verdade, o valor futuro da carteira é novamente igual a zero ($\pi_T = 0$) e portanto existirão oportunidades de arbitragem a não ser que o valor actual da carteira seja negativo ou nulo, isto é,

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -c_t+p_t+(F_t - X).e^{-r\tau} \leq 0 \Leftrightarrow +c_t-p_t \geq (F_t - X).e^{-r\tau}.$$

Em síntese, a inviabilização das duas estratégias de arbitragem anteriores passa pela conjunção das duas condições seguintes:

$$+c_t-p_t \leq (F_t - X).e^{-r\tau} \wedge +c_t-p_t \geq (F_t - X).e^{-r\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(F,X,T) - p(F,X,T) = (F_t - X).e^{-r\tau}$$

2.5.3.2. Opções americanas

Paridade "put-call": $\mathbf{F.e^{-r\tau} - X \leq C(F,X,T) - P(F,X,T) \leq F - X.e^{-r\tau}}$ (61)

Com vista à demonstração da desigualdade "$F.e^{-r\tau} - X \leq C(F,X,T) - P(F,X,T)$" atenda-se à seguinte carteira de arbitragem:

a) aquisição de uma opção de compra ("long call");

b) alienação de uma opção de venda ("short put");

c) venda de uma "obrigação de cupão zero" ("short OCZ") de valor nominal "$F_t - X.e^{r\tau}$" e com uma maturidade "τ"; e

d) "short rollover futures", ou seja, venda, em cada dia "t+s" (s = 0,1, ...,τ-1) anterior à data de vencimento das opções, de "$e^{-r[T-(t+s+1)]}$" contratos futuros, para no dia seguinte ("t+s+1") esses mesmos contratos serem comprados e o resultado gerado

$(-e^{-r[T-(t+s+1)]} \cdot (F_{t+s+1} - F_{t+s}))$ ser financiado (se for negativo, ou aplicado, se for positivo) até à data de vencimento dos contratos mediante a venda (ou compra) de uma "obrigação de cupão zero" com maturidade "T-(t+s+1)" e de valor nominal $(F_{t+s+1}-F_{t+s})$.

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO t+s ($s = 1, ..., \tau-1$)	MOMENTO T	MOMENTO T
		exercício antecipado da put	*Se* $F_T < X$	*Se* $F_T \geq X$
Long call	$-C_t$	$+C_{t+s}(VT)$	0	$+(F_T - X)$
Short put	$+P_t$	$-(X - F_{t+s})$	$-(X - F_T)$	0
Short OCZ	$+(F_t - X.e^{r\tau}).e^{-r\tau}$ $=$ $F_t.e^{-r\tau} - X$	$-(F_t.e^{-r\tau} - X).e^{rs}$ $=$ $-F_t.e^{-r(\tau-s)} + X.e^{rs}$	$-(F_t - X.e^{r\tau})$	$-(F_t - X.e^{r\tau})$
Short rollover futures	0	$-(F_{t+s} - F_t).e^{-r(\tau-s)}$	$-(F_T - F_t)$	$-(F_T - F_t)$
$\pi =$	$-C_t+P_t+F_t.e^{-r\tau}-$ $-X$	$+C_{t+s}(VT)$ $+F_{t+s}.[1-e^{-r(\tau-s)}]$ $+X.(e^{rs}-1) \geq 0$	$+X.(e^{r\tau}-1) \geq 0$	$+X.(e^{r\tau}-1) \geq 0$

Se a "put" for exercida antecipadamente[123] (isto é, em qualquer momento "t+s" anterior à sua data de vencimento) e conforme demonstrado no quadro anterior, o detentor da carteira beneficiará de um fluxo de tesouraria não negativo na medida em que procederá:

a) à venda da opção de compra detida, obtendo o respectivo *valor tempo*;

b) à aquisição de uma "obrigação de cupão zero", com uma maturidade igual ao tempo em falta para o vencimento das opções ("τ-s") e com um valor nominal igual a "$F_t - X.e^{r\tau}$", para que no momento "T" o recebimento deste último valor permita reembolsar o valor nominal da "obrigação de cupão zero" vendida no momento "t"[124] ; e

c) à desmobilização antecipada de todos os resultados dos futuros gerados até ao momento "t+s" (inclusive), os quais haviam sido financiados ou investidos até ao período "T", obtendo-se um valor acumulado de "$-(F_{t+s} - F_t).e^{-r(\tau-s)}$", isto é,

---

[123] O que, de acordo com o ponto 2.4.2.3. deste capítulo, é perfeitamente plausível para níveis suficientemente baixos de "F".

[124] Dito de outro modo, aquando do exercício antecipado da opção de venda (ou seja, ao fim de "s" períodos) proceder-se-á ao pagamento do capital e dos juros ("$(F_t.e^{-r\tau}-X).e^{rs}$") relativos ao empréstimo contraído no momento "t" e no valor de "$F_t.e^{-r\tau}-X$".

Momento	Nº de futuros vendidos	Resultado dos futuros	Financiamento ou investimento do resultado	Cash flow de cada período
t	$e^{-r[T-(t+1)]}$			
t+1	$e^{-r[T-(t+2)]}$	$-e^{-r[T-(t+1)]}.(F_{t+1}-F_t)$	$+e^{-r[T-(t+1)]}.(F_{t+1}-F_t)$	0
t+2	$e^{-r[T-(t+3)]}$	$-e^{-r[T-(t+2)]}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	$+e^{-r[T-(t+2)]}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	0
...	...	...	...	...
t+s-1	$e^{-r[T-(t+s)]}$	$-e^{-r[T-(t+s-1)]}.(F_{t+s-1}-F_{t+s-2})$	$+e^{-r[T-(t+s-1)]}.(F_{t+s-1}-F_{t+s-2})$	0
t+s	$e^{-r[T-(t+s+1)]}$	$-e^{-r[T-(t+s)]}.(F_{t+s}-F_{t+s-1})$	0	CF_{t+s}

no momento "t+s", para além do resultado desse período, procede-se também à liquidação do valor acumulado (até ao momento "t+s") dos financiamentos e/ou investimentos efectuados em todos os períodos anteriores, o que tudo somado ascende a um cash flow de

$$CF_{t+s} = -e^{-r[T-(t+1)]}.(F_{t+1}-F_t).e^{r[(t+s)-(t+1)]} - e^{-r[T-(t+2)]}.(F_{t+2}-F_{t+1}).e^{r[(t+s)-(t+2)]} - \ldots -$$

$$- e^{-r[T-(t+s-1)]}.(F_{t+s-1}-F_{t+s-2}).e^{r[(t+s)-(t+s-1)]} - e^{-r[T-(t+s)]}.(F_{t+s}-F_{t+s-1}) =$$

$$= [-(F_{t+1}-F_t) - (F_{t+2}-F_{t+1}) - \ldots - (F_{t+s-1}-F_{t+s-2}) - (F_{t+s}-F_{t+s-1})].e^{-r[T-(t+s)]} =$$

$$= -(F_{t+s} - F_t).e^{-r[T-(t+s)]} = -(F_{t+s} - F_t).e^{-r[(T-t)-s]} = -(F_{t+s} - F_t).e^{-r(\tau-s)}.$$

Por outro lado, na hipótese de não se assistir ao exercício antecipado da opção de venda, então a estratégia de arbitragem definida somente gerará fluxos financeiros na data de vencimento das opções, sendo o valor da carteira mais uma vez não negativo.

Deste modo, como o valor futuro da carteira é sempre não negativo ($\pi_{t+s,T} \geq 0$, para s = 1, ...,τ-1), o seu valor actual deverá ser não positivo,

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -C_t+P_t+F_t.e^{-r\tau}-X \leq 0 \Leftrightarrow$$

e portanto,

$$\Leftrightarrow F.e^{-r\tau} - X \leq C(F,X,T) - P(F,X,T).$$

Quanto à segunda desigualdade incorporada na condição (61), "C(F,X,T) - P(F,X,T) $\leq$ F - X.$e^{-r\tau}$", ela deriva da necessidade de inviabilização da seguinte estratégia de arbitragem:

a) venda de uma opção de compra ("short call");

b) compra de uma opção de venda ("long put");

c) compra de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ"), com um valor nominal de "$F.e^{r\tau}$-X" e com vencimento na maturidade das opções (ou seja, no momento "T"); e

d) compra, em cada dia "t+s" (s = 0,1, ...,τ-1) anterior à data de vencimento das opções, de "$e^{r(s+1)}$" contratos futuros, para no dia seguinte ("t+s+1") esses mesmos contratos serem vendidos e o resultado gerado ($e^{r(s+1)}.(F_{t+s+1}-F_{t+s})$) ser aplicado (se positivo, ou financiado, na hipótese contrária) até à data de vencimento das opções mediante a compra (ou venda) de uma "obrigação de cupão zero" com maturidade "T-(t+s+1)" e de valor nominal (F_{t+s+1}-F_{t+s}). Esta sucessão de operações irá ser designada por "long rollover futures", só que agora, e ao contrário do que foi demonstrado no ponto 2.4.2.3., o cash flow obtido no momento "T" ascende a "$(F_T-F_t).e^{r\tau}$", pois

Momento	Nº de futuros comprados	Resultado dos futuros	Investimento ou financiamento do resultado	Cash flow de cada período
t	e^r			
t+1	e^{2r}	$e^r.(F_{t+1}-F_t)$	$-e^r.(F_{t+1}-F_t)$	0
t+2	e^{3r}	$e^{2r}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	$-e^{2r}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	0
...	...	...	...	...
t+s	$e^{r(s+1)}$	$e^{rs}.(F_{t+s}-F_{t+s-1})$	$-e^{rs}.(F_{t+s}-F_{t+s-1})$	0
...	...	...	...	...
t+(τ-1)	$e^{r[(\tau-1)+1]}=e^{r\tau}$	$e^{r(\tau-1)}.(F_{T-1}-F_{T-2})$	$-e^{r(\tau-1)}.(F_{T-1}-F_{T-2})$	0
T ≡ t+τ	0	$e^{r\tau}.(F_T-F_{T-1})$	0	CF_T

apenas há lugar à obtenção de um fluxo financeiro no momento "T", o qual corresponde não só ao resultado do futuro desse período mas também à desmobilização do valor acumulado de todos os resultados anteriormente investidos ou financiados até esse momento, ou seja,

$$CF_T = e^r.(F_{t+1}-F_t).e^{r[T-(t+1)]} + e^{2r}.(F_{t+2}-F_{t+1}).e^{r[T-(t+2)]} + ... +$$

$$+ e^{r(\tau-1)}.(F_{T-1}-F_{T-2}).e^r + e^{r\tau}.(F_T-F_{T-1}) =$$

$$= [(F_{t+1}-F_t) + (F_{t+2}-F_{t+1}) + ... + (F_{T-1}-F_{T-2}) + (F_T-F_{T-1})].e^{r\tau} =$$

$$= (F_T - F_t).e^{r\tau}$$

O quadro seguinte sintetiza os fluxos financeiros associados à estratégia de arbitragem em análise:

ESTRATÉGIA DE ARBITRAGEM

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO t+s (s = 1, ...,τ-1)	MOMENTO T	MOMENTO T
		exercício antecipado da call	*Se $F_T < X$*	*Se $F_T \geq X$*
Short call	$+C_t$	$-(F_{t+s} - X)$	0	$-(F_T - X)$
Long put	$-P_t$	$+P_{t+s}(VT)$	$+(X - F_T)$	0
Long OCZ	$-(F_t.e^{r\tau}-X).e^{-r\tau}$ = $-(F_t - X.e^{-r\tau})$	$+(F_t - X.e^{-r\tau}).e^{rs}$ = $+F_t.e^{rs} - X.e^{-r(\tau-s)}$	$+(F_t.e^{r\tau}-X)$	$+(F_t.e^{r\tau}-X)$
Long rollover futures	0	$+(F_{t+s} - F_t).e^{rs}$	$+(F_T - F_t).e^{r\tau}$	$+(F_T - F_t).e^{r\tau}$
$\pi =$	$+C_t-P_t-F_t+X.e^{-r\tau}$	$+P_{t+s}(VT)$ $+F_{t+s}.(e^{rs}-1)$ $+X.[1-e^{-r(\tau-s)}] \geq 0$	$+F_T.(e^{r\tau}-1) \geq 0$	$+F_T.(e^{r\tau}-1) \geq 0$

Assim, mesmo que a "call" seja exercida antecipadamente o valor futuro da carteira será não negativo ($\pi_{t+s} \geq 0$, para s = 1, ...,τ-1), pois o seu detentor:

a) venderá a "put" em carteira pelo seu *valor tempo* (visto estar necessariamente "out-of-the-money");

b) venderá a "obrigação de cupão zero" adquirida no momento "t"; e

c) desmobilizará, antecipadamente, todos os resultados gerados pelos futuros até ao momento "t+s" (inclusive), os quais haviam sido investidos ou financiados até ao período "T", obtendo-se um valor acumulado de "$+(F_{t+s} - F_t).e^{rs}$", isto é,

Momento	Nº de futuros comprados	Resultado dos futuros	Investimento ou financiamento do resultado	Cash flow de cada período
t	e^r			
t+1	e^{2r}	$e^r.(F_{t+1}-F_t)$	$-e^r.(F_{t+1}-F_t)$	0
t+2	e^{3r}	$e^{2r}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	$-e^{2r}.(F_{t+2}-F_{t+1})$	0
...	...	...	...	...
t+s-1	e^{rs}	$e^{r(s-1)}.(F_{t+s-1}-F_{t+s-2})$	$e^{r(s-1)}.(F_{t+s-1}-F_{t+s-2})$	0
t+s	$e^{r(s+1)}$	$e^{rs}.(F_{t+s}-F_{t+s-1})$	0	CF_{t+s}

no momento "t+s", para além do resultado desse período, procede-se também à desmobilização do valor acumulado (até ao momento "t+s") dos investimentos e/ou financiamentos efectuados em todos os períodos anteriores, o que tudo somado ascende a um cash flow de

$$CF_{t+s} = +e^{r}.(F_{t+1}-F_t).e^{r[(t+s)-(t+1)]} + e^{2r}.(F_{t+2}-F_{t+1}).e^{r[(t+s)-(t+2)]} + \ldots +$$

$$+ e^{r(s-1)}.(F_{t+s-1}-F_{t+s-2}).e^{r[(t+s)-(t+s-1)]} + e^{rs}.(F_{t+s}-F_{t+s-1}) =$$

$$= [(F_{t+1}-F_t) + (F_{t+2}-F_{t+1}) + \ldots + (F_{t+s-1}-F_{t+s-2}) + (F_{t+s}-F_{t+s-1})].e^{rs} =$$

$$= (F_{t+s} - F_t).e^{rs}.$$

Se a opção de compra não for exercida antecipadamente, então a estratégia de arbitragem apenas libertará cash flows no momento "T", sendo o valor da carteira sempre não negativo ($\pi_T \geq 0$), independentemente da cotação do futuro subjacente.

Concluindo, como $\pi_{t+s,T} \geq 0$ (para s = 1, ...,τ-1), então

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow +C_t-P_t-F_t+X.e^{-r\tau} \leq 0 \Leftrightarrow$$

e portanto

$$\Leftrightarrow C(F,X,T) - P(F,X,T) \leq F - X.e^{-r\tau}.$$

3. MODELOS DE AVALIAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS SOBRE OBRIGAÇÕES

A descrição dos diversos modelos de avaliação de opções financeiras sobre obrigações será dividida em dois grandes blocos, a saber: a avaliação de opções sobre futuros e a avaliação de opções "on the spot". No entanto, previamente proceder-se-à ao estudo do modelo pioneiro ao nível da avaliação de opções.

3.1. Modelo de Black-Scholes[125]

Muito embora o modelo desenvolvido por Fischer Black e Myron Scholes forneça a primeira e, indubitavelmente, a mais conhecida fórmula analítica fechada de avaliação de opções, tratando-se de opções financeiras sobre obrigações e salvo raras excepções, a sua aplicabilidade encontra-se comprometida.

Mesmo assim, como algumas das fórmulas de avaliação de opções financeiras sobre obrigações podem ser deduzidas mediante a mera introdução de alterações sobre o modelo de Black-Scholes, convém proceder desde já à análise deste último.

3.1.1. Pressupostos

O modelo de Black-Scholes permite a valorização de opções "europeias" desde que sejam verificadas as seguintes hipóteses:

i) os mercados de opções e do activo subjacente não envolvem quaisquer custos de transacção, sendo os diversos títulos perfeitamente divisíveis;

ii) a taxa de rendimento sem risco é constante durante a vida da opção e igual a "r" por unidade de tempo;

iii) o activo subjacente não gera cash flows durante a vida da opção;

iv) o preço do activo subjacente segue um *processo de ITO*, isto é,

$$\Delta S_t = \alpha(S_t,t).S_t.\Delta t + \sigma(S_t,t).S_t.\Delta Z_t$$

sendo,

$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$;

---

[125]Black, F., e M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Maio-Junho 1973, pp. 637-54.

$\alpha(S_t,t) \equiv$ taxa de rendimento esperada do activo subjacente durante o período de tempo Δt;
$\sigma(S_t,t) \equiv$ desvio-padrão da taxa de rendimento esperada do activo subjacente durante o período de tempo Δt[126]; e
$\Delta Z_t = Z_{t+\Delta t} - Z_t$, onde $\{Z_t, t \in [0, +\infty[\}$ é um *processo de Wiener*, ou seja,

$$\Delta Z_t \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$$

e

$$COV(\Delta Z_t, \Delta Z_{t^*}) = 0 \quad \text{para } t \neq t^*$$

Desde logo é possível observar que, como o valor de uma obrigação corresponde à soma dos seus cash flows futuros actualizados e portanto decresce pelo valor do cupão em cada período de capitalização, dificilmente o preço de uma obrigação que gere cupões antes do vencimento da opção poderá obedecer ao movimento Browniano geométrico descrito anteriormente. No entanto, se o activo subjacente for um futuro sobre uma obrigação, então a hipótese (iv) poderá já ser admissível.

3.1.2. Equação diferencial fundamental

Com base nos pressupostos enunciados é possível deduzir a equação diferencial à qual deverá obedecer o valor de qualquer opção "europeia" (de compra ou de venda)[127].

Para tal, basta construir uma carteira de
.$n(S_t,t)$ activos subjacentes
e
.$m(S_t,t)$ obrigações de cupão zero, emitidas pelo Estado (ou seja, de risco nulo), com um valor nominal unitário e maturidade igual ao tempo em falta para o vencimento da opção,
de forma a que tal carteira constitua uma cópia exacta do perfil de cash flows (em termos de montante e data de ocorrência) da opção em análise. Tratando-se de uma call "europeia", como os fluxos financeiros a ela associados apenas têm lugar nos momentos "t" e "T", sendo o último cash flow dado por $c_T = \max[0, S_T - X]$, então a "carteira cópia" deverá obedecer a duas condições:
1ª) a carteira não poderá gerar qualquer fluxo financeiro entre os momento "t" e "T" (condição de autofinanciamento); e
2ª) o valor da carteira na maturidade da opção terá de ser dado por

$$V_T = V(S_T,T) = \max[0, S_T - X]$$

No momento "t", o valor da carteira corresponde a

$$V_t = V(S_t,t) = n.S_t + m.B_t, \quad \text{em que } B_t = e^{-r\tau}$$

e portanto a variação do seu valor no período de tempo Δt vem igual a

---

[126]Este parâmetro traduz a volatilidade do preço do activo subjacente, a qual é suposta constante durante a vigência da opção em análise.
[127]Vide Jarrow, R., e A. Rudd, *Option Pricing*, Dow Jones-Irwin, 1983, capítulo 8.

$\Delta V = V(S_{t+\Delta t},t+\Delta t) - V(S_t,t) = n.\Delta S + m.\Delta B + \Delta n.(S_t+\Delta S) + \Delta m.(B_t+\Delta B) + O(\Delta t)$
sendo,

$\Delta B = B_{t+\Delta t} - B_t = e^{r\Delta t} = r.\Delta t + O(\Delta t)$;

$\Delta n = n(S_{t+\Delta t},t+\Delta t) - n(S_t,t)$;

$\Delta m = m(S_{t+\Delta t},t+\Delta t) - m(S_t,t)$; e

$O(\Delta t)$: $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Então, para que a condição de autofinanciamento seja satisfeita, é necessário que as transacções de activos e de obrigações se compensem de forma exacta, ou seja, que

$$\Delta n.(S_t+\Delta S) + \Delta m.(B_t+\Delta B) = 0$$

$$\Delta B = r.\Delta t + O(\Delta t) \quad \Downarrow \quad \lim_{\Delta t\to 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

$\Delta n.S_t + \Delta n.\Delta S + \Delta m.B_t + \Delta m.r.\Delta t = 0$, sendo esta última igualdade designada por equação de autofinanciamento.

Mas como:

i) desenvolvendo Δn em série de Taylor e desprezando os termos de ordem superior à segunda, para "S", e à primeira, para "t", obtém-se

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot\Delta S + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial S_t^2}\cdot\Delta S^2 + O(\Delta t)$$

e como

$$\Delta S^2 = \sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t + O(\Delta t)\text{ [128]}$$

vem, finalmente

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot\Delta S + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t + O(\Delta t)$$

ii) de igual modo, desenvolvendo Δm em série de Taylor (até à segunda ordem, para "S", e até à primeira ordem, para "t") e atendendo à igualdade $\Delta S^2 = \sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t + O(\Delta t)$, obtém-se

[128]Pois, $(\alpha\cdot S_t\cdot\Delta t + \sigma\cdot S_t\cdot\Delta Z_t)^2 = \alpha^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t^2 + 2\cdot\alpha\cdot\sigma\cdot S_t^2\cdot\Delta t\cdot\Delta Z_t + \sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta Z_t^2$, $\Delta Z_t^2 = \Delta t$ e $\Delta t^2 = \Delta t\cdot\Delta Z_t = O(\Delta t)$.

$$\Delta m = \frac{\partial m}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{\partial m}{\partial S_t}\cdot\Delta S + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 m}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t + O(\Delta t)$$

iii) atendendo à expressão dada pela alínea i),

$$\Delta n.\Delta S = [\frac{\partial n}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot\Delta S + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t + O(\Delta t)].\Delta S$$

$$\Delta t.\Delta S = O(\Delta t)^{129} \quad \Downarrow \quad \Delta S^2 = \sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t + O(\Delta t)$$

$$\Delta n.\Delta S = \frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t + O(\Delta t)$$

iv) finalmente, utilizando a expressão da alínea ii),

$$\Delta m.r.\Delta t = [\frac{\partial m}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{\partial m}{\partial S_t}\cdot\Delta S + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 m}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t + O(\Delta t)].r.\Delta t$$

e sabendo que $\Delta t^2 = O(\Delta t)$ e $\Delta t.\Delta S = O(\Delta t)$, vem

$\Delta m.r.\Delta t = O(\Delta t)$.

Então, a equação de autofinanciamento

$$\Delta n.S_t + \Delta n.\Delta S + \Delta m.B_t + \Delta m.r.\Delta t = 0 \Leftrightarrow$$

passa a ser dada por

$$\Leftrightarrow (\frac{\partial n}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot\Delta S + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t + O(\Delta t)).S_t + \frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t +$$

$$+ (\frac{\partial m}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{\partial m}{\partial S_t}\cdot\Delta S + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 m}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2\cdot\Delta t).e^{-r\tau}$$

$$\Downarrow \quad \Delta S = \alpha\cdot S_t\cdot\Delta t + \sigma\cdot S_t\cdot\Delta Z_t$$

ou seja,

$$X\cdot\Delta t + Y.\sigma\cdot S_t\cdot\Delta Z_t = 0$$

sendo,

---

[129] Pois, $\Delta t\cdot(\alpha\cdot S_t\cdot\Delta t + \sigma\cdot S_t\cdot\Delta Z_t) = \alpha\cdot S_t\cdot\Delta t^2 + \sigma\cdot S_t\cdot\Delta t\cdot\Delta Z_t$, $\Delta t^2 = O(\Delta t)$ e $\Delta t\cdot\Delta Z_t = O(\Delta t)$.

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot\alpha\cdot S_t+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 n}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2\right)\cdot S_t+\frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2+$$

$$+[-r\cdot e^{rt}\cdot(V-n\cdot S_t)+e^{rt}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial n}{\partial t}\cdot S_t\right)+e^{rt}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial S_t}-n-\frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot S_t\right)\cdot\alpha\cdot S_t+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot e^{rt}\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}-2\cdot\frac{\partial n}{\partial S_t}-\frac{\partial^2 n}{\partial S_t^2}\cdot S_t\right)\cdot\sigma^2\cdot S_t^2].e^{-rt}=0$$

$$\wedge$$

$$\frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot S_t+e^{rt}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial S_t}-n-\frac{\partial n}{\partial S_t}\cdot S_t\right)\cdot e^{-rt}=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-r\cdot V+r\cdot n\cdot S_t+\frac{\partial V}{\partial S_t}\cdot\alpha\cdot S_t-n\cdot\alpha\cdot S_t+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2=0$$

$$\wedge$$

$$n=\frac{\partial V}{\partial S_t}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2+\frac{\partial V}{\partial t}+r\cdot S_t\cdot\frac{\partial V}{\partial S_t}-r\cdot V=0$$

Em síntese, uma carteira $V(S_t,t)$ que obedeça à condição de autofinanciamento dada pela igualdade anterior, não gera qualquer cash flow entre os momentos "t" e "T". Consequentemente, uma carteira $V(S_t,t)$ constituirá uma cópia exacta do perfil de cash flows de uma opção de compra "europeia" desde que preencha os dois requisitos seguintes:

i) $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2+\frac{\partial V}{\partial t}+r\cdot S_t\cdot\frac{\partial V}{\partial S_t}-r\cdot V=0$; e

ii) $V(S_T,T)=\max[0, S_T - X]$.

Então, se tal acontecer e de forma a evitar a existência de oportunidades de arbitragem, ter-se-á de verificar a igualdade $c_t = V(S_t,t)$, pelo que a equação diferencial fundamental a satisfazer pelo valor de qualquer call "europeia" (e no âmbito dos pressupostos do modelo) é dada por:

$$\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2+\frac{\partial c}{\partial t}+r\cdot S_t\cdot\frac{\partial c}{\partial S_t}-r\cdot c=0}$$

sujeito a (62)

$c_T = \max[0, S_T - X]$

3.1.3. Argumento de neutralidade face ao risco

Observando a equação diferencial (62) constata-se que ela apenas depende de parâmetros que não são função do perfil de risco do investidor, a saber:

.o preço actual do activo subjacente (S_t);

.a volatilidade do preço do activo subjacente (σ^2); e

.a taxa de rendimento sem risco (r).[130]

Assim, como a equação diferencial (62) não depende do perfil de risco do investidor (isto é, qualquer que seja o grau de aversão ao risco considerado, ele em nada irá afectar a solução da equação diferencial), então esta pode ser resolvida assumindo um qualquer perfil de risco, em particular e em virtude da sua simplicidade, admitindo que o investidor é neutral face ao risco[131]. E sendo, por hipótese, os investidores neutrais face ao risco, então qualquer activo possuirá uma remuneração esperada igual à taxa de rendimento sem risco, o que no caso de uma opção de compra "europeia" se traduzirá pelo facto de:

$$E\left(\frac{c_T}{c_t}\right)=e^{r\tau}\Leftrightarrow c_t=E\left(c_T\right)\cdot e^{-r\tau}$$ [132]

$\Updownarrow$ $c_T = \max[0, S_T - X]$

$$c_t=E\left[\max\left(0,S_T-X\right)\right]\cdot e^{-r\tau}$$

Mas como,

[130]Com efeito, o único parâmetro que depende do perfil de risco do investidor é a taxa de rendimento esperada do activo subjacente (α), a qual não está incluída na equação diferencial fundamental.

[131]Obviamente que na prática, os agentes económicos ao invés de neutrais são normalmente avessos ao risco e portanto, tanto a taxa de rendimento esperada para o activo subjacente como a taxa de actualização dos cash flows gerados pela opção são maiores do que a taxa de rendimento sem risco. Deste modo, o que a equação (62) permite verificar, à luz dos pressupostos do modelo, é o facto de as duas diferenças anteriores se anularem mutuamente, o que possibilita a utilização da taxa de rendimento sem risco para ambos os casos (seja como taxa de rendimento esperada para o activo subjacente, ou como taxa de actualização dos cash flows da opção).

[132]Pois, o valor actual da call é conhecido (é uma constante).

Mas como,

$$\begin{cases} S_T \leq X \Rightarrow \max(0, S_T - X) = 0 \Rightarrow c_t = E(0)\cdot e^{-r\tau} = 0 \\ S_T > X \Rightarrow \max(0, S_T - X) = S_T - X \Rightarrow c_t = E(S_T - X)\cdot e^{-r\tau} \end{cases}$$

então, fazendo $p = P[S_T > X]$[133], vem

$$c_t = E[\max(0, S_T - X)]\cdot e^{-r\tau} \Leftrightarrow c_t = (1-p)\cdot 0 + p\cdot\left[E(S_T / S_T > X)\cdot e^{-r\tau} - X\cdot e^{-r\tau}\right] \Leftrightarrow^{134}$$

$$\Leftrightarrow c_t = p\cdot E(S_T / S_T > X)\cdot e^{-r\tau} - p\cdot X\cdot e^{-r\tau}$$

Concluindo, para obter a formula de valorização de uma opção de compra "europeia" há então que resolver esta última equação.

3.1.4. Distribuição de probabilidades do preço do activo subjacente na maturidade da opção

Todavia, a resolução da equação anterior requer o conhecimento da distribuição de probabilidades de S_T. Ora, o modelo de Black-Scholes assume que o preço do activo subjacente na maturidade da opção segue uma distribuição lognormal, na medida em que pressupõe que o comportamento de "S" é descrito por um *processo de ITO.*

Com efeito, considerando o pressuposto iv) em tempo contínuo, isto é,

$$dS = \alpha\cdot S\cdot dt + \sigma\cdot S\cdot dZ \quad \text{com} \quad dZ \frown N\left(0, \sqrt{dt}\right)$$

e aplicando o *Lema de ITO*[135] à transformação G(S,t) = lnS, obtém-se

$$d\ln S = \left[\frac{1}{S}\cdot\alpha\cdot S + 0 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{S^2}\right)\cdot\sigma^2\cdot S^2\right]\cdot dt + \frac{1}{S}\cdot\sigma\cdot S\cdot dZ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d\ln S = (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})\cdot dt + \sigma\cdot dZ \Leftrightarrow$$

Fazendo $\mu = \alpha - \dfrac{\sigma^2}{2}$, vem

---

[133] Pelo que, $1-p = P[S_T \leq X]$.

[134] "S_T" é uma variável aleatória, mas "X" é uma constante.

[135] Se a variável "x" segue um *processo de ITO* (isto é, dx = a(x,t).dt + b(x,t).dZ onde Z segue um *processo de Wiener*) e G = G(x,t), então a variável "G" também segue um *processo de ITO*, sendo

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\cdot a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\cdot b^2\right)\cdot dt + \frac{\partial G}{\partial x}\cdot b\cdot dZ$$

$$\Leftrightarrow d\ln S = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dZ \text{ com } dZ \cap N\left(0, \sqrt{dt}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d\ln S = \mu \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{dt} \cdot Z \text{ com } Z \cap N(0,1)$$

Considerando que "dt" corresponde ao tempo em falta para o vencimento da opção,

$$dt = \Delta t = T - t = \tau,$$

ou seja, trabalhando em tempo discreto, a equação anterior assume finalmente a forma

$$\ln S_T - \ln S_t = \mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z \Leftrightarrow$$ [136]

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z$$

sendo,

$Z \cap N(0,1)$

$\mu \equiv$ rendimento logarítmico esperado para o activo subjacente, por intervalo de tempo.[137]

3.1.5. Fórmula de Black-Scholes

Em resultado dos dois quesitos anteriores, a determinação da fórmula de avaliação de Black-Scholes para uma opção de compra "europeia" vai ser feita mediante a resolução das equações

$$c_t = p \cdot E(S_T / S_T > X) \cdot e^{-r\tau} - p \cdot X \cdot e^{-r\tau}$$

e

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z,$$

procedimento este que será equivalente a encontrar a solução da equação diferencial (62) para a distribuição de probabilidades considerada para S_T.

Comecemos, em primeiro lugar, por determinar a probabilidade $p = P[S_T > X]$. Como

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z \Leftrightarrow S_T = S_t \cdot \exp\left(\mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z\right) \Rightarrow$$

---

[136] Conforme facilmente se constata, $\ln S_T \cap N\left(\ln S_t + \mu \cdot \tau, \sigma \cdot \sqrt{\tau}\right)$, pelo que S_T possui uma distribuição lognormal visto o seu logaritmo seguir uma distribuição normal.

[137] $\mu = E\left[\frac{1}{\tau} \cdot \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\right]$.

então,

$$\Rightarrow p = P\left[S_t \cdot \exp\left(\mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z\right) > X\right] \Leftrightarrow p = P\left[\mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z > \ln\left(\frac{X}{S_t}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = P\left\{Z > -\frac{\left[\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \mu \cdot \tau\right]}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}\right\} \Leftrightarrow$$

Mas, como a distribuição normal é simétrica[138], logo

$$\Leftrightarrow p = P\left\{Z < \frac{\left[\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \mu \cdot \tau\right]}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}\right\} \Leftrightarrow p = N\left\{\frac{\left[\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \mu \cdot \tau\right]}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}\right\}$$

sendo N(y) = $P\left[Z \leq y\right] = \int_{-\infty}^{y} N'(x)dx$ a função densidade acumulada da distribuição normal reduzida (distribuição Z) e $N'(x)dx = P\left[x \leq Z \leq x + dx\right] = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \cdot dx$, em que N'(x) representa a função densidade de probabilidades da distribuição Z.

Por outro lado e atendendo ao argumento de neutralidade face ao risco, sendo os investidores (por hipótese) neutrais face ao risco então, o activo subjacente também deverá possuir uma remuneração esperada igual à taxa de rendimento sem risco:

$$E\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = e^{r\tau}.$$

Mais ainda, uma vez que $\frac{S_T}{S_t} = \exp\left(\mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z\right)$ então,

$$E\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = E\left[\exp\left(\mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z\right)\right] = e^{\mu \cdot \tau} \cdot E\left(e^{\sigma \sqrt{\tau} \cdot Z}\right) = e^{\mu \cdot \tau} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\sigma \sqrt{\tau} \cdot x} \cdot e^{-x^2/2} dx =$$

[138] P[Z>-y] = P[Z<y].

$$= e^{\mu \cdot \tau} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 - 2\sigma\sqrt{\tau} + \sigma^2 \cdot \tau - \sigma^2 \cdot \tau\right)} dx = e^{\mu \cdot \tau} \cdot \left[e^{\sigma^2/2 \cdot \tau} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(x - \sigma\sqrt{\tau}\right)^2}{2}} dx \right] \Leftrightarrow^{139}$$

$$\Leftrightarrow E(S_T / S_t) = \exp\left[\left(\mu + \sigma^2/2\right) \cdot \tau\right]$$

Portanto, como $\begin{cases} E(S_T / S_t) = \exp(r \cdot \tau) \\ E(S_T / S_t) = \exp\left[\left(\mu + \sigma^2/2\right) \cdot \tau\right] \end{cases} \Rightarrow \left(\mu + \sigma^2/2\right) \cdot \tau = r \cdot \tau \Leftrightarrow \mu = r - \sigma^2/2$

Por último, substituindo "μ" por "$r - \sigma^2/2$" obtém-se uma forma mais conveniente para a expressão seguinte:

$$\frac{\ln(S_t / X) + \mu \cdot \tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} = \frac{\ln(S_t / X) + r \cdot \tau - \sigma^2 \tau/2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} = \frac{\ln(S_t / X) + r \cdot \tau + \sigma^2 \tau/2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau}$$

Concluindo, a probabilidade "p" é dada por:

$$p = N\left(h - \sigma \cdot \sqrt{\tau}\right) \text{ sendo, } h = \frac{\ln(S_t / X) + r \cdot \tau + \sigma^2 \tau/2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}.$$

Uma vez determinada a expressão da probabilidade de a opção de compra expirar "in-the-money", ir-se-á calcular o valor esperado do preço do activo subjacente na maturidade para a hipótese de a call expirar "in-the-money", o qual será designado por "q":

$$q = E(S_T / S_T > X) \cdot p \Leftrightarrow^{140} q = \int_{X}^{+\infty} S_t \cdot \exp\left(\mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot x\right) \cdot \frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} \cdot dx \Leftrightarrow$$

---

[139] $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(x - \sigma\sqrt{\tau}\right)^2}{2}} dx = 1$, pois trata-se da área contida sob uma distribuição normal de média "$\sigma\sqrt{\tau}$" e de variância unitária.

[140] Tendo em conta que $S_T = S_t \cdot \exp\left(\mu \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z\right)$ e que a variável aleatória Z possui uma distribuição normal reduzida.

$$\Leftrightarrow q = \int_{x}^{+\infty} S_t \cdot \exp\left(\mu\tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot x - \frac{x^2}{2} - \sigma^2 \tau/2 + \sigma^2 \tau/2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q = S_t \cdot \exp\left[\left(\mu + \sigma^2/2\right)\tau\right] \cdot \int_{x}^{+\infty} \exp\left[\frac{-\left(\sigma^2\tau - 2\sigma\sqrt{\tau}\cdot x + x^2\right)}{2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot dx \Leftrightarrow^{141}$$

$$\Leftrightarrow S_t \cdot \exp(r \cdot \tau) \cdot \int_{x}^{+\infty} \exp\left[\frac{-\left(\sigma\sqrt{\tau} - x\right)^2}{2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot dx \Rightarrow$$

Fazendo a substituição de variáveis

$$y = \sigma\sqrt{\tau} - x,$$

como $y < h$ quando $S_T > X$, pois

$$S_T > X \Leftrightarrow^{142} Z > -\frac{\ln\left(S_t/X\right) + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \Leftrightarrow \sigma\sqrt{\tau} - Z < \frac{\ln\left(S_t/X\right) + \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau} \Leftrightarrow^{143}$$

$$\Leftrightarrow y < \frac{\ln\left(S_t/X\right) + r\tau - \sigma^2\tau/2 + \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \Leftrightarrow y < \frac{\ln\left(S_t/X\right) + r\tau + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}} \Leftrightarrow y < h$$

então "q" passa a ser dado por

$$\Rightarrow q = S_t \cdot \exp(r\tau) \cdot \int_{-\infty}^{h} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot dy \Leftrightarrow q = S_t \cdot e^{r\tau} \cdot N(h)$$

Para terminar, basta conjugar as três igualdades seguintes

$$\begin{cases} c_t = E(S_T / S_T > X) \cdot p \cdot e^{-r\tau} - X \cdot e^{-r\tau} \cdot p \\ E(S_T / S_T > X) \cdot p = S_t \cdot e^{r\tau} \cdot N(h) \\ p = N\left(h - \sigma\sqrt{\tau}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

de modo a obter a fórmula de Black-Scholes para uma opção de compra "europeia":

---

[141] $\mu + \sigma^2/2 = r$.

[142] Conforme demonstrado anteriormente.

[143] $\mu = r - \sigma^2/2$.

$$\Rightarrow c_t = S_t \cdot e^{r\tau} \cdot N(h) \cdot e^{-r\tau} - X \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(h - \sigma\sqrt{\tau}\right)$$

$$\Updownarrow$$

FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES:
OPÇÕES DE COMPRA

$$\boxed{\begin{array}{l} c_t(S, X, T) = S_t \cdot N(h) - X \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(h - \sigma\sqrt{\tau}\right) \\ \\ \text{sendo } \mathbf{h} = \dfrac{\ln(S_t / X) + r \cdot \tau + \sigma^2 \tau / 2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} \end{array}} \qquad (63)$$

Apesar de a fórmula anterior ter sido deduzida para uma opção de compra "europeia", como se tratam de opções cujos activos subjacentes não geram quaisquer cash flows até à sua maturidade e como não faz sentido proceder ao exercício antecipado de opções "americanas" sobre tais activos subjacentes[144], então a fórmula (63) é aplicável a qualquer opção de compra, seja ela "europeia" ou "americana" (mas, sempre à luz dos pressupostos inerentes ao modelo).

No que concerne às opções de venda "europeias", com base no teorema da paridade "put-call" para opções "europeias" sem cupões -expressão (56),

$$c_t - p_t = S_t - X \cdot e^{-r\tau} \Leftrightarrow c_t = p_t + S_t - X \cdot e^{-r\tau}$$

pode-se facilmente deduzir a sua equação diferencial fundamental.

De facto, como

$$\frac{\partial c_t}{\partial S_t} = \frac{\partial p_t}{\partial S_t} + 1, \quad \frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2} = \frac{\partial^2 p_t}{\partial S_t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial c_t}{\partial t} = \frac{\partial p_t}{\partial t} - r \cdot X \cdot e^{-r\tau}$$ [145]

então, fazendo as substituições apropriadas na equação diferencial (62)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial t} + r \cdot S_t \cdot \frac{\partial c}{\partial S_t} - r \cdot c = 0,$$

vem

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} \cdot \sigma^2 \cdot S_t^2 + \frac{\partial p}{\partial t} - r \cdot X \cdot e^{-r\tau} + r \cdot S_t \cdot \frac{\partial p}{\partial S_t} + r \cdot S_t - r \cdot p - r \cdot S_t + r \cdot X \cdot e^{-r\tau} = 0$$

$$\Updownarrow$$

[144] Conforme referido anteriormente.
[145] Pois, $\tau = T - t$.

pelo que, a equação diferencial fundamental de uma put "europeia" é dada por

$$\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2+\frac{\partial p}{\partial t}+r\cdot S_t\cdot\frac{\partial p}{\partial S_t}-r\cdot p=0} \qquad (64)$$

sujeito a,

$p_T = \max[0, X - S_T]$

Por fim, a fórmula de Black-Scholes para opções de venda "europeias" pode ser rapidamente obtida, mediante a conjugação do teorema de paridade "put-call" anterior com a expressão (63):

$$\begin{cases} p_t = c_t - S_t + X\cdot e^{-r\tau} \\ c_t = S_t\cdot N(h) - X\cdot e^{-r\tau}\cdot N\left(h-\sigma\sqrt{\tau}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_t = S_t\cdot N(h) - X\cdot e^{-r\tau}\cdot N\left(h-\sigma\sqrt{\tau}\right) - S_t + X\cdot e^{-r\tau} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_t = S_t\cdot\left[N(h)-1\right] - X\cdot e^{-r\tau}\cdot\left[N\left(h-\sigma\sqrt{\tau}\right)-1\right] \Leftrightarrow$$ [146]

FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES:
OPÇÕES DE VENDA "EUROPEIAS"

$$\mathbf{p_t(S,X,T) = -S_t\cdot N(-h) + X\cdot e^{-r\tau}\cdot N\left(\sigma\sqrt{\tau}-h\right)} \qquad (65)$$

sendo $\mathbf{h} = \dfrac{\ln(S_t/X) + r\cdot\tau + \sigma^2\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$

Ao contrário do que sucede com as opções de compra, a fórmula de Black-Scholes para opções de venda apenas é aplicável aos contratos de tipo "europeu", uma vez que as opções de venda "americanas" sobre activos subjacentes que não libertem fluxos financeiros até à data de vencimento do contrato podem ser objecto de exercício antecipado (vide quesito 2.4.2.1.).[147]

---

[146] Como $N(y) + N(-y) = 1$, então $N(y) - 1 = -N(-y)$.

[147] Para obter a equação diferencial fundamental aplicável a puts "americanas" basta ajustar a restrição inerente à expressão (64):

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2}\cdot\sigma^2\cdot S_t^2+\frac{\partial P}{\partial t}+r\cdot S_t\cdot\frac{\partial P}{\partial S_t}-r\cdot P=0$$

sujeito a,

$P_T = \max(0, X - S_T) \quad \wedge \quad P_s = \max(p_s, X - S_s), \forall t \leq s \leq T.$

No entanto, esta equação diferencial apenas pode ser resolvida mediante o recurso a um método numérico.

3.1.6. Estimação da volatilidade do preço do activo subjacente (σ)

Observando as fórmulas (63) e (65) constata-se que "σ" é a única variável não directamente observável do modelo de Black-Scholes. De igual modo, os modelos de avaliação próprios para opções sobre obrigações também irão ser função deste parâmetro, razão pela qual interessa conhecer a forma de estimação do seu valor.

Portanto, antes de se proceder à aplicação de um modelo de avaliação de opções, é necessário obter uma estimativa para o parâmetro "σ", sendo que o método de estimação mais utilizado encontra-se resumido nas fórmulas (66), (67) e (68):

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_m \cdot \sqrt{365/m} \text{ [148]} \qquad (66)$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left[\ln\left(\frac{S_{j+1}}{S_j} \right) - \hat{u} \right]^2}{n-1} \qquad (67)$$

$$\hat{u} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{S_{j+1}}{S_j} \right)}{n} = \frac{\ln S_{n+1} - \ln S_1}{n} \qquad (68)$$

sendo,

σ ≡ volatilidade do preço do activo subjacente, a qual é dada pelo desvio-padrão anual da taxa de rendimento esperada para o activo subjacente;

$\hat{\sigma}$ ≡ estimador, não enviesado, do parâmetro "σ";

$n+1$ ≡ número de observações passadas do preço do activo subjacente, igualmente espaçadas no tempo;

S_j ≡ j-ésima observação da cotação do activo subjacente; e

m ≡ espaço de tempo, expresso em dias, compreendido entre duas observações consecutivas.

A aplicação da metodologia descrita baseia-se no pressuposto de que a volatilidade do preço do activo subjacente é constante ao longo do tempo, pelo que o valor desta última para o periodo "T-t" pode ser previsto com base em observações passadas de "S". Muito embora a aderência empírica de tal assunção não seja grande (na prática, σ varia ao longo do tempo), a grande vantagem desta abordagem reside no facto de proporcionar um estimador centrado.

Na verdade, como û é um estimador centrado de $\mu.\tau$[149], pois

---

[148] Para alguns autores $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_m \cdot \sqrt{250/m}$, ou seja, ignoram-se os dias em que o mercado não funciona.

$$E(\hat{u}) = E\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{S_{j+1}}{S_j}\right)}{n}\right] = \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} E(\mu\cdot\tau+\sigma\cdot\Delta Z) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot(\mu\cdot\tau+\sigma\cdot 0) = \mu\cdot\tau$$

e portanto $\hat{\sigma}_m^2$ é um estimador centrado de $\sigma^2\cdot\tau$, visto que

$$E(\hat{\sigma}_m^2) = E\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{S_{j+1}}{S_j}\right)-\hat{u}\right]^2}{n-1}\right\} = \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{j=1}^{n} E\left\{\left[\ln\left(\frac{S_{j+1}}{S_j}\right)-\mu\cdot\tau\right]^2 - (\hat{u}-\mu\cdot\tau)^2\right\} =^{150}$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot n\cdot\left[E(\sigma^2\cdot\Delta Z^2) - VAR(\hat{u})\right] = \frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2\cdot VAR(\Delta Z) - \frac{n}{n-1}\cdot VAR\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\ln\left(\frac{S_{j+1}}{S_j}\right)}{n}\right] =$$

$$= \frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2\cdot\tau - \frac{n}{(n-1)\cdot n^2}\cdot\sum_{j=1}^{n} VAR(\mu\cdot\tau+\sigma\cdot\Delta Z) = \frac{n}{n-1}\cdot\sigma^2\cdot\tau - \frac{n}{(n-1)\cdot n^2}\cdot n\cdot\sigma^2\cdot\tau =$$
$$= \sigma^2\cdot\tau$$

então, para se obter um estimador não enviesado de σ basta dividir $\hat{\sigma}_m$ por $\sqrt{\tau}$, ou seja,

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_m}{\sqrt{\tau}} = \frac{\hat{\sigma}_m}{\sqrt{m/365}} = \hat{\sigma}_m\cdot\sqrt{365/m}$$

[149] Sendo $\tau = m/365$, quando expresso em anos.

[150] $\ln\left(\frac{S_{j+1}}{S_j}\right) = \mu\cdot\tau+\sigma\cdot\Delta Z$.

Em alternativa, Latane e Rendleman propõem a determinação da volatilidade do preço do activo subjacente implícita às próprias cotações das opções em mercado. Para tal e face a uma série histórica de cotações da opção e do activo subjacente, basta aplicar o modelo de avaliação da opção em análise e resolvê-lo em ordem ao parâmetro σ. No entanto, para além de se continuar a assumir que a volatilidade do preço do activo subjacente é constante ao longo do tempo, ainda se faz depender a qualidade da previsão de "σ" da fiabilidade inerente ao modelo de avaliação de opções utilizado.

3.2. Avaliação de opções financeiras sobre futuros de obrigações

3.2.1. Opções "europeias": Modelo de Black-Scholes

Conforme se irá verificar, o modelo de Black-Scholes desenvolvido anteriormente, desde que sujeito a pequenas modificações, pode ser facilmente utilizado para proceder à avaliação de opções "europeias" sobre futuros. Todavia, em virtude do potencial de exercício antecipado associado às opções "americanas" sobre futuros[151] não é possível avaliar estes contratos através das fórmulas desenvolvidas para os seus homólogos "europeus" e como a maior parte das opções sobre futuros tende a ser do tipo "americano", então ter-se-ão de estudar, posteriormente, alguns métodos numéricos de avaliação deste tipo de contratos. De qualquer modo, convém sempre ter presente o modelo de Black-Scholes para opções sobre futuros, não só pelo facto de ser directamente aplicável aos contratos de tipo "europeu" como também porque poderá sempre fornecer uma aproximação para o valor das opções "americanas".

3.2.1.1. Relação entre a cotação do futuro (F) e o preço em mercado spot (S)

Pressupondo uma estrutura temporal de taxas de juro horizontal[152] e operando em regime de capitalização contínua, é possível demonstrar a existência da seguinte relação entre a cotação de um futuro e o preço no mercado à vista do seu activo subjacente:

$$S_t = F_t \cdot e^{-r\tau} \qquad (69)$$

sendo,

$S_t \equiv$ preço do activo subjacente no momento "t";
$F_t \equiv$ cotação do futuro no momento "t";
$\tau = T - t$; e
$T \equiv$ data de vencimento do contrato futuro.

Na verdade, a igualdade (69) resulta de três ordens de razões:

i) Por um lado, constata-se que uma call e uma put "europeias", ambas com igual maturidade, têm o mesmo valor desde que o seu preço de exercício coincida com a cotação de um contrato forward sobre idêntico activo subjacente e para a mesma data de vencimento, isto é,

[151] Vide pontos nº2.4.1.3 e nº2.4.2.3 deste trabalho.
[152] Assim como a inexistência de custos de transacção e de oportunidades de arbitragem.

$$X = f_t \Rightarrow c_t = p_t$$

onde,

$X \equiv$ preço de exercício das opções;
$f_t \equiv$ cotação do contrato forward no momento "t";
$c_t = c(F,X,T)$; e
$p_t = p(F,X,T)$.

Com efeito, considere-se uma carteira com a seguinte composição:
a) compra de um contrato a prazo ("long forward") com vencimento no momento "T" e a uma cotação "f_t";
b) venda de uma opção de compra "europeia" ("short call") com um preço de exercício "f_t" e vencimento no momento "T"; e
c) compra de uma opção de venda "europeia" ("long put") com um preço de exercício "f_t" e vencimento no momento "T".

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T	MOMENTO T
		Se $S_T \leq f_t$	Se $S_T > f_t$
Long forward	0	$S_T - f_t$ [153]	$S_T - f_t$
Short call	$+c_t$	0	$-(S_T - f_t)$
Long put	$-p_t$	$+(f_t - S_T)$	0
$\pi =$	$+c_t - p_t$	0	0

O quadro anterior mostra que o valor futuro de tal portafólio é sempre nulo ($\pi_T = 0$), razão pela qual a inexistência de oportunidades de arbitragem impõe que o seu valor actual seja não positivo:

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow +c_t - p_t \leq 0$$

De igual modo, determinem-se os cash flows associados a uma carteira com uma composição exactamente oposta à descrita anteriormente:
a) venda de um contrato a prazo ("short forward") com vencimento no momento "T" e a uma cotação "f_t";
b) aquisição de uma opção de compra "europeia" ("long call") com um preço de exercício "f_t" e vencimento no momento "T"; e
c) alienação de uma opção de venda "europeia" ("short put") com um preço de exercício "f_t" e vencimento no momento "T".

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T	MOMENTO T
		Se $S_T \leq f_t$	Se $S_T > f_t$
Short forward	0	$-(S_T - f_t)$	$-(S_T - f_t)$ [154]
Long call	$-c_t$	0	$+(S_T - f_t)$
Short put	$+p_t$	$-(f_t - S_T)$	0
$\pi =$	$-c_t + p_t$	0	0

[153] O comprador de um contrato a prazo é obrigado a adquirir, na maturidade do mesmo, o activo subjacente à cotação fixada inicialmente.
[154] O vendedor de um contrato a prazo é obrigado a vender, na maturidade do mesmo, o activo subjacente pela cotação fixada inicialmente.

Novamente, $\pi_T = 0$ e consequentemente

$$\pi_t \leq 0 \Leftrightarrow -c_t+p_t \leq 0.$$

Conjugando as duas últimas desigualdades,

$$\begin{cases} +c_t - p_t \geq 0 \\ -c_t + p_t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

as quais foram obtidas assumindo-se que $X = f_t$, conclui-se que

$$\Rightarrow c_t = p_t$$

ii) Por outro lado, associando a conclusão anterior

$$X = f_t \Rightarrow c_t = p_t$$

ao teorema da paridade "put-call" para opções europeias "on the spot" sem cupões,

$$c_t - p_t = S_t - X \cdot e^{-r\tau}$$

obtém-se

$$0 = S_t - f_t \cdot e^{-r\tau} \Leftrightarrow f_t = S_t \cdot e^{r\tau}$$

iii) Finalmente, Cox, Ingersoll e Ross demonstraram que a cotação de um futuro é idêntica à cotação de um contrato forward com igual maturidade e sobre o mesmo activo subjacente, desde que as taxas de juro sejam consideradas constantes.

Assim sendo e atendendo à última igualdade,

$$\begin{cases} F_t = f_t \\ f_t = S_t \cdot e^{r\tau} \end{cases} \Rightarrow$$

prova-se que

$$\Rightarrow F_t = S_t \cdot e^{r\tau}$$, como queríamos demonstrar.

De facto, para mostrar que $F_t = f_t$ quando "r" é constante, basta confrontar os resultados produzidos por duas estratégias de arbitragem. A primeira gera os fluxos financeiros resumidos no quadro seguinte e consiste:

a) na compra de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") com vencimento no momento "T" e com um valor nominal igual à cotação actual do contrato forward para idêntico prazo ("f_t"); e

b) na aquisição de um contrato a prazo ("long forward") com vencimento no momento "T".

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T
Long OCZ	$-f_t \cdot e^{-r\tau}$	$+f_t$
Long forward	0	$S_T - f_t$
$\pi =$	$-f_t \cdot e^{-r\tau}$	$+S_T$

Os cash flows inerentes à segunda carteira estão sintetizados no quadro abaixo exposto e a sua composição assenta:

a) na compra de uma "obrigação de cupão zero" ("long OCZ") com vencimento no momento "T" e com um valor nominal igual à cotação actual do contrato futuro para idêntico prazo ("F_t"); e

b) na concretização de um "long rollover futures"[155].

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO T
Long OCZ	$-F_t \cdot e^{-r\tau}$	$+F_t$
Long rollover futures	0	$F_T - F_t$
$\pi =$	$-F_t \cdot e^{-r\tau}$	$+F_T$

Como na maturidade de um contrato futuro a sua cotação tende para o preço spot do activo subjacente ($F_T = S_T$), então o valor futuro (π_T) de ambas as carteiras é igual, pelo que a inexistência de oportunidades de arbitragem requer que o seu valor actual (π_t) também seja o mesmo:

$$-f_t \cdot e^{-r\tau} = -F_t \cdot e^{-r\tau} \Rightarrow f_t = F_t$$

3.2.1.2. Equação diferencial fundamental

Admitindo os pressupostos associados ao modelo original de Black-Scholes[156] e, consequentemente, assumindo também a igualdade (69), conclui-se que a própria cotação do futuro (à semelhança do preço spot do activo subjacente) segue também um *processo de ITO*[157]:

$$dF = \gamma(F,t) \cdot F \cdot dt + \sigma(F,t) \cdot F \cdot dZ \qquad (70)$$

sendo,

$\gamma(F,t) = \alpha - r \equiv$ taxa de rendimento esperada do futuro por unidade de tempo;

$\sigma(F,t) \equiv$ desvio-padrão da taxa instantânea de rendimento esperada; e

Z um *processo de Wiener*, isto é, $\begin{cases} dZ \cap N\left(0, \sqrt{dt}\right) \\ COV\left(dZ_t, dZ_{t^*}\right) = 0, t \neq t^* \end{cases}$

De facto, como $dS = \alpha \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dZ$ (onde Z é um *processo de Wiener*), a aplicação do *Lema de ITO* à transformação $F(S,t) = S \cdot e^{r(T-t)}$ conduz à igualdade (70):

155 Vide quesito 2.4.2.3.

156 Vide ponto nº 3.1.1.

157 Por uma questão de conveniência, ir-se-á trabalhar em tempo contínuo.

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial S} \cdot \alpha \cdot S + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} \cdot \sigma \cdot S \cdot dZ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dF = \left[e^{r\tau} \cdot \alpha \cdot S + \left(-r \cdot S \cdot e^{r\tau} \right) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \right] dt + e^{r\tau} \cdot \sigma \cdot S \cdot dZ$$

$$\Downarrow F = S \cdot e^{r\tau}$$

$$dF = (\alpha - r) \cdot F \cdot dt + \sigma \cdot F \cdot dZ.$$

A verificação da equação (70) permite agora aplicar o *Lema de ITO* à função V=V(F,t), onde "V" representa o valor de uma opção (de compra ou de venda; de tipo "europeu" ou de tipo "americano") sobre futuros de obrigações:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial F} \cdot \gamma \cdot F + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} \cdot \sigma^2 \cdot F^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial F} \cdot \sigma \cdot F \cdot dZ$$

Por outro lado, considere-se uma carteira composta pela venda de uma opção sobre futuros e pela compra de $\partial V / \partial F$ futuros, cujo valor, designado por "Π", é igual a

$$\Pi = -1 \cdot V + \partial V / \partial F \cdot 0^{158} \Leftrightarrow \Pi = -V$$

e cuja variação do seu valor no espaço de tempo "dt" é designada por "$d\Pi$" e corresponde a

$$d\Pi = -1 \cdot dV + \partial V / \partial F \cdot dF$$

$$\Downarrow \begin{cases} dV = \left(\frac{\partial V}{\partial F} \cdot \gamma \cdot F + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} \cdot \sigma^2 \cdot F^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial F} \cdot \sigma \cdot F \cdot dZ \\ dF = \gamma \cdot F \cdot dt + \sigma \cdot F \cdot dZ \end{cases}$$

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} \cdot \sigma^2 \cdot F^2 \right) dt$$

A igualdade anterior evidencia que $d\Pi$ não depende de dZ, ou seja, que a carteira em análise é uma carteira sem risco. Assim sendo, então tal carteira deve proporcionar uma remuneração idêntica à taxa de rendimento sem risco:

$$d\Pi = r \cdot \Pi \cdot dt$$

[158] A venda de um contrato futuro não proporciona qualquer encaixe financeiro imediato.

Com base nesta última equação é fácil derivar a equação diferencial à qual deverá obedecer o valor de qualquer opção sobre futuros de obrigações, bastando efectuar as duas substituições a seguir referidas:

$$\Downarrow\begin{cases} d\Pi = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 V}{\partial F^2}\cdot\sigma^2\cdot F^2\right)dt \\ \Pi = -V \end{cases}$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial F^2}\cdot\sigma^2\cdot F^2\right)dt = r\cdot(-V)\cdot dt \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial F^2}\cdot\sigma^2\cdot F^2 + \frac{\partial V}{\partial t} - r\cdot V = 0} \qquad (71)$$

Portanto, o valor de qualquer opção sobre futuros de obrigações (seja ela uma opção de compra ou de venda; de tipo "europeu" ou "americano") é encontrado mediante a resolução da equação diferencial (71), sendo que o valor particular de cada categoria de opções é distinguido pelo conjunto de restrições sujeito ao qual se procede à determinação da solução da equação (71).

3.2.1.3. Fórmula de Black-Scholes

Para se obter o valor de uma opção de compra "europeia" sobre futuros de obrigações há que resolver a equação diferencial (71) impondo a verificação da condição de acordo com a qual na maturidade da opção o seu preço corresponde ao seu *valor intrínseco*, isto é,

$c_t(F,X,T)$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 c_t}{\partial F_t^2}\cdot\sigma^2\cdot F_t^2 + \frac{\partial c_t}{\partial t} - r\cdot c_t = 0$$

com,

$$c_T = \max\,[0,\ F_T - X]$$

Todavia, tal procedimento é equivalente a resolver a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 c_t}{\partial F_t^2}\cdot\sigma^2\cdot F_t^2 + \frac{\partial c_t}{\partial t} - r\cdot c_t = 0$$

sujeita à restrição c_T = max [0, S_T - X] e tendo em conta que $S_t = F_t \cdot e^{-r\tau}$, razão pela qual $c_t(F,X,T)$ pode ser obtido substituindo S_t por $F_t \cdot e^{-r\tau}$ na expressão de Black-Scholes para $c_t(S,X,T)$:

$$\begin{cases} c_t(S,X,T) = S_t \cdot N(h) - X \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(h - \sigma\sqrt{\tau}\right) \\ h = \dfrac{\ln\left(S_t / X\right) + \left(r + \sigma^2 / 2\right) \cdot \tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} \\ S_t = F_t \cdot e^{-r\tau} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_t(F,X,T) = F_t \cdot e^{-r\tau} \cdot N(h) - X \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(h - \sigma \cdot \sqrt{\tau}\right) \\ h = \dfrac{\ln\left(F_t / X\right) + \ln e^{-r\tau} + r\tau + \sigma^2 \tau / 2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES:
OPÇÕES DE COMPRA "EUROPEIAS"
SOBRE FUTUROS DE OBRIGAÇÕES

$$\boxed{\begin{array}{l} c_t(\boldsymbol{F},\boldsymbol{X},\boldsymbol{T}) = e^{-r\tau} \cdot \left[\boldsymbol{F}_t \cdot N(\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{X} \cdot N\left(\boldsymbol{h} - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right] \\ \\ \text{sendo } \mathbf{h} = \dfrac{\ln\left(\boldsymbol{F}_t / \boldsymbol{X}\right) + \sigma^2 \tau / 2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} \end{array}} \qquad (72)$$

Note-se que a fórmula anterior não é aplicável a opções de compra "americanas" sobre futuros de obrigações, uma vez que, conforme foi demonstrado no quesito 2.4.1.3., para níveis suficientemente elevados de F_t pode ser vantajoso proceder ao seu exercício antecipado[159]. Com efeito, o valor de uma call "americana" sobre futuros de obrigações -$C_t(F,X,T)$- é obtido mediante a resolução da equação diferencial

[159]Dito de outro modo, o potencial de exercício antecipado associado às opções de compra "americanas" sobre futuros de obrigações faz com que o seu valor seja superior ao das suas congéneres "europeias". Na verdade, apenas na data de vencimento dos contratos os seus valores são idênticos, dado que na maturidade de um futuro a sua cotação converge para o preço spot do activo subjacente:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 C_t}{\partial F_t^2}\cdot\sigma^2\cdot F_t^2+\frac{\partial C_t}{\partial t}-r\cdot C_t=0$$

sujeita agora às restrições

$$C_T = \max[0, F_T - X]$$

e

$$C_s = \max[c_s, F_s - X] \quad \text{para } t \leq s < T.$$

Infelizmente, o problema anterior não possui uma solução analítica fechada, apenas podendo ser resolvido através da aplicação de um método numérico[160].

Quanto ao valor de uma opção de venda "europeia" sobre futuros de obrigações, ele resulta da resolução da equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 p_t}{\partial F_t^2}\cdot\sigma^2\cdot F_t^2+\frac{\partial p_t}{\partial t}-r\cdot p_t=0$$

sujeita à restrição

$$p_T = \max[0, X - F_T],$$

ou em alternativa, pode ser mais facilmente encontrado através da aplicação, à fórmula (72), do teorema da paridade "put-call" para opções "europeias" sobre futuros de obrigações:

$$\begin{cases} c_t(F,X,T)=e^{-r\tau}\cdot\left[F_t\cdot N(h)-X\cdot N\left(h-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right] \\ c_t(F,X,T)-p_t(F,X,T)=(F_t-X)\cdot e^{-r\tau} \end{cases}\Rightarrow$$

$$p_t(F,X,T)=e^{-r\tau}\cdot\left[F_t\cdot N(h)-X\cdot N\left(h-\sigma\cdot\sqrt{\tau}\right)\right]-(F_t-X)\cdot e^{-r\tau}\Leftrightarrow$$

$$p_t(F,X,T)=e^{-r\tau}\cdot\left\{-F_t\cdot\left[1-N(h)\right]+X\cdot\left[1-N\left(h-\sigma\cdot\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_T(S,X,T)=\max(0,S_T-X) \\ c_T(F,X,T)=\max(0,F_T-X)\Rightarrow c_T(S,X,T)=c_T(F,X,T) \\ F_T=S_T \end{cases}$$

[160] De qualquer modo e em última análise, poder-se-á sempre utilizar a fórmula (72) para obter uma aproximação do valor de uma call "americana" sobre futuros de obrigações, muito embora tal procedimento implique a não consideração do prémio de exercício antecipado associado ao preço destes contratos.

FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES:
OPÇÕES DE VENDA "EUROPEIAS"
SOBRE FUTUROS DE OBRIGAÇÕES

$$p_t(F,X,T) = e^{-r\tau}\cdot\left[-F_t\cdot N(-h) + X\cdot N\left(\sigma\sqrt{\tau}-h\right)\right] \qquad (73)$$

$$\text{sendo } \mathbf{h} = \frac{\ln(F_t/X)+\sigma^2\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

Mais uma vez, a expressão anterior não é apropriada para a avaliação de opções de venda "americanas" sobre futuros de obrigações, dado o facto de o seu exercício antecipado poder ser vantajoso para níveis suficientemente baixos da cotação do futuro, apenas podendo fornecer uma mera aproximação para o seu valor. Na verdade, o seu valor deveria ser encontrado mediante a resolução da equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 P_t}{\partial F_t^2}\cdot\sigma^2\cdot F_t^2+\frac{\partial P_t}{\partial t}-r\cdot P_t=0$$

sujeita agora às restrições

$$P_T = \max\,[0, X - F_T]$$

e

$$P_s = \max\,[p_s, X - F_s] \quad \text{para } t \le s < T.$$

Todavia, tal metodologia não permite obter uma solução analítica fechada, a qual apenas poderá ser aproximada mediante a aplicação de um método numérico.

3.2.2. Opções "americanas"

Dada a impossibilidade de utilização do modelo de Black-Scholes para a avaliação de opções "americanas" sobre futuros de obrigações, ir-se-á proceder à análise de outros modelos de avaliação especialmente vocacionados para este tipo de opções[161]. Tratam-se sobretudo dos designados "métodos numéricos", os quais podem assentar na aproximação do processo estocástico seguido pelo futuro subjacente à opção (método de Monte Carlo e modelo binomial) ou na aproximação da equação diferencial fundamental (método das diferenças finitas), muito embora sejam ainda desenvolvidas fórmulas de avaliação aproximadas (a aproximação quadrática de Barone-Adesi e Whaley bem como a aproximação polinomial de Geske-Johnson).

3.2.2.1. Método de simulação de Monte Carlo[162]

A avaliação de opções sobre futuros através do método de simulação de Monte Carlo consiste em gerar a distribuição de probabilidades da cotação do futuro subjacente na maturidade da opção, assumindo um qualquer processo estocástico para a cotação do futuro subjacente, para a partir daí, e com base na equação do *valor intrínseco* de uma opção na sua maturidade, obter a distribuição de probabilidades do valor da opção na sua data de vencimento. Finalmente, o argumento de neutralidade face ao risco permite obter o valor actual da opção em análise mediante o desconto, à taxa de rendimento sem risco, do valor esperado da opção na sua maturidade.

Tratando-se de opções "europeias", o algoritmo de aplicação do método de Monte Carlo deverá englobar as seguintes etapas:

1º) Gerar a distribuição de probabilidades da cotação do futuro na maturidade da opção (F_T).

Em particular, caso se admita que a cotação do futuro segue um *processo de ITO*[163] - $dF = \gamma(F,t) \cdot F \cdot dt + \sigma(F,t) \cdot F \cdot dZ$, onde Z segue um *processo de Wiener*-, isto é[164], supondo que a cotação do futuro na maturidade da opção (F_T) possui uma distribuição lognormal

---

[161] Mas, também aplicáveis às opções "europeias" sobre futuros.

[162] A aplicação do método de Monte Carlo à avaliação de opções foi estudada por P. Boyle no artigo "Options: a Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, nº 4, 1977, pp. 323-338.

[163] Pode-se pressupor qualquer outro processo estocástico.

[164] Basta aplicar o *Lema de ITO* à transformação G(F,t) = lnF:

$$d\ln F = \left[\frac{1}{F} \cdot \gamma \cdot F + 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{F^2}\right) \cdot \sigma^2 \cdot F^2\right] dt + \frac{1}{F} \cdot \sigma \cdot F \cdot dZ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln F_T - \ln F_t = \left(\gamma - \sigma^2/2\right) \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z, \text{ fazendo } dt = T - t.$$

$$-\ln\left(\frac{F_T}{F_t}\right) = \theta\cdot\tau+\sigma\cdot\sqrt{\tau}\cdot Z\text{, onde } Z \cap N(0,1) \text{ e } \theta = \gamma - \frac{\sigma^2}{2}\text{ -}$$

então,

$$\frac{F_T}{F_t} = \exp\left(\theta\cdot\tau+\sigma\cdot\sqrt{\tau}\cdot Z\right) \Leftrightarrow F_T = F_t\cdot\exp\left(\theta\cdot\tau+\sigma\cdot\sqrt{\tau}\cdot Z\right).$$

Por outro lado, como

$$E\left(\frac{F_T}{F_t}\right) = E\left[\exp\left(\theta\cdot\tau+\sigma\cdot\sqrt{\tau}\cdot Z\right)\right] = e^{\theta\cdot\tau}\cdot E\left(e^{\sigma\cdot\sqrt{\tau}\cdot Z}\right) = e^{\theta\cdot\tau}\cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}\cdot\tau} = \exp\left[\left(\theta+\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\tau\right]$$

e

$E\left(\frac{F_T}{F_t}\right) = e^{r\tau}$, por força do argumento de neutralidade face ao risco, então

$$\theta+\frac{\sigma^2}{2} = r \Leftrightarrow \theta = r - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Concluindo, a distribuição de probabilidades de F_T é obtida através da geração de uma amostra aleatória de valores de "Z"[165] e subsequente substituição na expressão

$$\boxed{F_T^i = F_t\cdot\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\tau+\sigma\cdot\sqrt{\tau}\cdot Z_i\right]} \qquad (74)$$

sendo,

i = 1, 2, ..., n

em que,

n ≡ dimensão da amostra aleatória de valores de "Z".

2º) **Obter a distribuição de probabilidades do valor da opção, na sua data de vencimento.**

Para o efeito, basta atender ao facto de o valor de uma opção na sua maturidade corresponder ao seu *valor intrínseco*, ou seja, há que utilizar as seguintes fórmulas:

- opções de compra: $\boxed{c_T^i = \max\left(F_T^i - X, 0\right)}$ (75)

para i = 1, 2, ..., n

- opções de venda: $\boxed{p_T^i = \max\left(X - F_T^i, 0\right)}$ (76)

[165] Para o efeito, basta gerar uma amostra aleatória de uma distribuição normal estandardizada (ε) e aplicar a fórmula $Z_i = \varepsilon_i\cdot\sqrt{\tau}$, com $\varepsilon \cap N(0,1)$.

3°) **Calcular o *valor esperado* do preço da opção na maturidade.**

- opções de compra: $\boxed{E(c_T) = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_T^i}{n}}$ (77)

- opções de venda: $\boxed{E(p_T) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_T^i}{n}}$ (78)

4°) **Calcular o valor da opção na data de avaliação.**

Por fim e atendendo ao argumento de neutralidade face ao risco, o valor da opção no momento "t" não será mais do que o valor esperado do preço da opção na maturidade actualizado à taxa de rendimento sem risco:

- opções de compra: $\boxed{c_t = e^{-r\tau} \cdot E(c_T)}$ (79)

- opções de venda: $\boxed{p_t = e^{-r\tau} \cdot E(p_T)}$ (80)

Em termos práticos, como uma opção "europeia" sobre futuros de obrigações pode ser facilmente avaliada com base no modelo de Black-Scholes, o recurso ao método de simulação de Monte Carlo torna-se desnecessário, a não ser que se pretenda assumir outro processo estocástico para a cotação do futuro subjacente que não um movimento browniano geométrico.

Quanto às **opções "americanas"** sobre futuros de obrigações e apesar da inexistência de uma fórmula analítica fechada que permita a sua avaliação, o recurso ao método de simulação de Monte Carlo afigura-se pouco exequível. De facto, a possibilidade de exercício antecipado inerente a uma opção "americana" sobre futuros faz com que seja necessário gerar a distribuição de probabilidades da cotação do futuro não só na maturidade da opção mas também para todos os momentos compreendidos entre a data de avaliação e a data de vencimento da opção. Para tal, há que subdividir o espaço de tempo "τ" em "m" intervalos:

```
|--------|--------|-----------------------------------|
t        t+1      t+2   ...                           t+m = T
```

Assim sendo, o algoritmo de aplicação do método de simulação de Monte Carlo à avaliação de opções "americanas" sobre futuros de obrigações torna-se bastante mais moroso do que o descrito anteriormente para as opções de tipo "europeu":

1°) Gerar a distribuição de probabilidades da cotação do futuro para cada um dos "m" intervalos de tempo compreendidos entre a data de avaliação e a data de vencimento da opção.

Tal como anteriormente, poder-se-á pressupor qualquer processo estocástico para a cotação do futuro subjacente, mas caso se assuma um movimento browniano geométrico, então as distribuições de probabilidades serão obtidas via recurso à seguinte fórmula:

$$\boxed{F^{i}_{t+(j+1)} = F_{t+j} \cdot \exp\left(r - \sigma^2/_2 + \sigma \cdot Z_i \right)} \text{[166]} \qquad (81)$$

sendo,

i = 1, 2, ..., n
j = 0, 1, ..., m-1

2°) Obter a distribuição de probabilidades do valor da opção na sua data de vencimento.

Tal é feito aplicando a equação do *valor intrínseco* da opção à distribuição de probabilidades da cotação do futuro na maturidade do contrato:

- opções de compra: $$\boxed{C^{i}_{T} = \max\left(F^{i}_{T} - X, 0 \right)} \qquad (82)$$

para i = 1, 2, ..., n

- opções de venda: $$\boxed{P^{i}_{T} = \max\left(X - F^{i}_{T}, 0 \right)} \qquad (83)$$

3°) Calcular o *valor esperado* do valor da opção na maturidade.

- opções de compra: $$\boxed{E(C_T) = \frac{\sum_{i=1}^{n} C^{i}_{T}}{n}} \qquad (84)$$

[166]Pois, $\tau = \left[t + (j+1) \right] - (t + j) = 1$.

- opções de venda: $$\boxed{E(P_T)=\frac{\sum_{i=1}^{n} P_T^i}{n}} \qquad (85)$$

4°) **Obter a distribuição de probabilidades do valor da opção no período "T-1".**

Atendendo ao argumento de neutralidade face ao risco, o valor de uma opção num dado momento é igual ao valor actualizado, à taxa de rendimento sem risco, do seu preço esperado para o momento seguinte. No entanto, como se tratam de opções "americanas", então o seu preço nunca poderá vir inferior ao seu *valor intrínseco*:

- opções de compra: $$\boxed{C_{T-1}^i=\max\left[e^{-r}\cdot E(C_T),F_{T-1}^i-X\right]} \qquad (86)$$

i = 1, 2, ..., n

- opções de venda: $$\boxed{P_{T-1}^i=\max\left[e^{-r}\cdot E(P_T),X-F_{T-1}^i\right]} \qquad (87)$$

5°) **Calcular o valor esperado do preço da opção no período "T-1".**

- opções de compra: $$\boxed{E(C_{T-1})=\frac{\sum_{i=1}^{n} C_{T-1}^i}{n}} \qquad (88)$$

- opções de venda: $$\boxed{E(P_{T-1})=\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{T-1}^i}{n}} \qquad (89)$$

6°) **Repetir as etapas (4) e (5) até ao período "t+1"**, mediante a utilização das seguintes fórmulas de recorrência:

- opções de compra:

$$\boxed{C_{t+j}^i=\max\left[e^{-r}\cdot E\left(C_{t+j+1}\right),F_{t+j}^i-X\right]} \qquad (90)$$

i = 1, 2, ..., n

j = 1, 2, ..., m-2

$$\boxed{E\left(C_{t+j}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n} C_{t+j}^i}{n}} \qquad (91)$$

j = 1, 2, ..., m-2

- opções de venda:

$$\boxed{P^{i}_{t+j} = \max\left[e^{-r} \cdot E\left(P_{t+j+1}\right), X - F^{i}_{t+j}\right]} \qquad (92)$$

i = 1, 2, ..., n
j = 1, 2, ..., m-2

$$\boxed{E\left(P_{t+j}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P^{i}_{t+j}}{n}} \qquad (93)$$

j = 1, 2, ..., m-2

7°) **Calcular o valor da opção na data de avaliação.**

- opções de compra: $\boxed{C_t = \max\left[e^{-r} \cdot E(C_{t+1}), F_t - X\right]}$ (94)

- opções de venda: $\boxed{P_t = \max\left[e^{-r} \cdot E(P_{t+1}), X - F_t\right]}$ (95)

Comparando o grau de dificuldade resultante da aplicação dos dois algoritmos anteriormente descritos, constata-se que o método de simulação de Monte Carlo está especialmente vocacionado para a avaliação de opções "europeias" sobre activos subjacentes cujo processo estocástico a que se encontram sujeitos seja complexo ou nem sequer possua uma forma analítica explícita (isto é, cuja distribuição de probabilidades do preço do activo subjacente tenha de ser gerada empiricamente). Na verdade, embora a grande vantagem deste método resida no facto de poder ser aplicado independentemente do processo estocástico seguido pelo preço do activo subjacente, tratando-se de opções "americanas" o algoritmo de aplicação revela-se bastante complicado.

Outra desvantagem deste método numérico de avaliação de opções consiste na necessidade de realização de um elevado número de simulações (isto é, um elevado valor para o parâmetro "n"), por forma a garantir a qualidade da estimativa do valor da opção[167]. Com vista a obviar este último inconveniente[168], podem ser utilizadas duas variantes dos algoritmos anteriormente expostos, a saber:

i) <u>Técnica da variante antitética</u>

$$\boxed{\hat{V}^{A}_{t} = \frac{\hat{V}_t + \hat{V}^{-}_t}{2}} \qquad (96)$$

[167] Com efeito, Boyle demonstrou que o desvio-padrão da estimativa do valor da opção é inversamente proporcional à raiz quadrada do número de simulações realizadas.
[168] Ou seja, com o intuito de reduzir a variância da estimativa do valor da opção, sem que para tal seja necessário efectuar um número excessivamente elevado de simulações.

sendo,

$\hat{V}_t^{\prime}$ ≡ estimativa do valor da opção obtida através do método da variante antitética;

$\hat{V}_t$ ≡ estimativa do valor da opção obtida através da aplicação do método de Monte Carlo de acordo com os algoritmos apresentados, isto é, mediante a geração da amostra aleatória $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$; e

$\hat{V}_t^-$ ≡ estimativa do valor da opção obtida através da aplicação do método de Monte Carlo, só que desta feita mediante a utilização da amostra aleatória $(-Z_1, -Z_2, \ldots, -Z_n)$[169].

ii) <u>Técnica da variante de controle</u>

$$\boxed{\hat{V}_t^c(A) = \hat{V}_t(A) - \hat{V}_t(B) + V_t(B)} \tag{97}$$

sendo,

A ≡ opção sob avaliação;

B ≡ opção similar à opção A[170], mas cujo valor hoje -$V_t(B)$- seja conhecido;

$\hat{V}_t^c(A)$ ≡ estimativa do valor da opção A obtida através da técnica da variante de controle;

$\hat{V}_t(A)$ ≡ estimativa do valor da opção A obtida através da aplicação do método de Monte Carlo de acordo com os algoritmos apresentados;

$\hat{V}_t(B)$ ≡ estimativa do valor da opção B obtida através da aplicação do método de Monte Carlo de acordo com os algoritmos apresentados; e

$V_t(B)$ ≡ valor conhecido para a opção B no momento "t" (preço de mercado ou solução fornecida por uma fórmula de avaliação analítica fechada).

---

[169] Deste modo $COV\left(\hat{V}_t, \hat{V}_t^-\right) < 0$ e portanto menor será o valor de

$$VAR\left(\hat{V}_t^{\prime}\right) = \frac{1}{4}\cdot\left[VAR\left(\hat{V}_t\right) + VAR\left(\hat{V}_t^-\right)\right] + \frac{1}{2}\cdot COV\left(\hat{V}_t, \hat{V}_t^-\right).$$

[170] Para que esta técnica seja eficaz, como

$VAR\left[\hat{V}_t^c(A)\right] = VAR\left[\hat{V}_t(A)\right] + VAR\left[\hat{V}_t(B)\right] - 2\cdot COV\left[\hat{V}_t(A), \hat{V}_t(B)\right]$, é necessário que as opções A e B estejam fortemente correlacionadas.

3.2.2.2. Modelo binomial[171]

3.2.2.2.1. Pressupostos

A aplicação do modelo binomial para avaliar uma opção sobre um futuro de obrigações pressupõe a verificação das quatro hipóteses seguintes:

i) Não existem custos de transacção e os diversos títulos são perfeitamente divisíveis;

ii) A taxa de rendimento sem risco é constante ao longo da vida da opção e igual a "r" por unidade de tempo;

iii) O tempo em falta para a maturidade da opção (τ = T - t) subdivide-se em "I" intervalos de dimensão "τ/I" cada:

|--------------|--------------|---|

t $\qquad t+1\cdot \tau/I \qquad t+2\cdot \tau/I \qquad \ldots \qquad T=t+I\cdot \tau/I$

iv) A cotação do futuro subjacente à opção segue um processo binomial multiplicativo, isto é,

$$F_{t+1}=\begin{cases} e^{u}\cdot F_t & \text{com probabilidade q} \\ e^{v}\cdot F_t & \text{com probabilidade 1 - q} \end{cases}, \ \forall t \ \text{ e } \ \text{com } 0<q<1.$$

Tal significa que em cada período de tempo (t) sabe-se que a cotação do futuro (F) no período seguinte (t+1) ou aumenta para "$e^{u}\cdot F_t$", com probabilidade "q", ou então diminui para "$e^{v}\cdot F_t$", com probabilidade "1-q"[172].

3.2.2.2.2. Opções de compra "europeias" sobre futuros

Considere-se, em primeiro lugar, a valorização de uma call "europeia" sobre futuros de obrigações a um período de distância da sua maturidade. Designando por "F" a

[171] Modelo desenvolvido por Cox, Ross e Rubinstein no artigo "Option Pricing: a simplified approach", *Journal of Financial Economics*, nº 7, 1979, pp. 229-63.

[172] É óbvio que, na prática, a cotação de um futuro não pode apenas assumir dois valores em cada momento. No entanto, esta objecção pode ser facilmente contornada através da subdivisão de "τ" em intervalos de tempo tão curtos quanto possível (ou seja, fazendo "I" tender para +∞).

cotação actual do futuro, então[173] a cotação do futuro dentro de um período de tempo será dada por

$$\begin{cases} e^{u} \cdot F \text{ com probabilidade q} \\ \text{ou} \\ e^{v} \cdot F \text{ com probabilidade 1 - q} \end{cases}$$

e portanto, o valor da opção de compra na sua maturidade corresponderá a

$$\begin{cases} c_u = \max\left(0, e^{u} \cdot F - X\right) \text{ com probabilidade q} \\ \text{ou} \\ c_v = \max\left(0, e^{v} \cdot F - X\right) \text{ com probabilidade 1 - q} \end{cases}.$$

Por seu turno, a determinação do valor actual da opção de compra (designado por "c") pode ser feita mediante a valorização, no momento presente, de uma carteira de futuros e de obrigações de cupão zero (com maturidade de um período de tempo e valor nominal unitário) cujo valor dentro de um período coincida com o valor da call na maturidade. Isto é, se no momento presente for possível constituir uma carteira de "n" contratos futuros e "m" obrigações de cupão zero (com maturidade de um período de tempo e valor nominal unitário) cujo valor dentro de um período de tempo coincida com o valor da opção na sua maturidade, então o valor actual da opção terá de ser igual ao valor presente da carteira.

Mas, como o valor de tal carteira, dentro de um período de tempo, será dado por

$$\begin{cases} n \cdot \left(e^{u} \cdot F - F\right) + m \cdot 1 \text{ com probabilidade q} \\ \text{ou} \\ n \cdot \left(e^{v} \cdot F - F\right) + m \cdot 1 \text{ com probabilidade 1 - q} \end{cases}$$

então, para que a carteira "decalque" o valor da opção, dentro de um período de tempo, é necessário que

$$\begin{cases} n \cdot \left(e^{u} \cdot F - F\right) + m = c_u \\ n \cdot \left(e^{v} \cdot F - F\right) + m = c_v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \dfrac{c_u - c_v}{\left(e^{u} - e^{v}\right) \cdot F} \\ m = \dfrac{\left(1 - e^{v}\right) \cdot c_u + \left(e^{u} - 1\right) \cdot c_v}{e^{u} - e^{v}} \end{cases}$$

[173] Assumindo um processo binomial multiplicativo.

Portanto, o valor presente de uma carteira composta por "$\dfrac{c_u - c_v}{\left(e^u - e^v\right)\cdot F}$" contratos futuros e por "$\dfrac{\left(1-e^v\right)\cdot c_u + \left(e^u - 1\right)\cdot c_v}{e^u - e^v}$" obrigações de cupão zero (com maturidade de um período de tempo e valor nominal unitário) terá de ser igual ao valor actual da opção ("c").

Por outro lado, como o valor presente de tal carteira se cinge ao investimento em obrigações de cupão zero (uma vez que o investimento em futuros é nulo), então

$$c = \frac{\left(1-e^v\right)\cdot c_u + \left(e^u - 1\right)\cdot c_v}{e^u - e^v}\cdot e^{-r\cdot\frac{\tau}{t}} \Leftrightarrow c = e^{-r\cdot\frac{\tau}{t}}\cdot\left[\left(\frac{1-e^v}{e^u-e^v}\right)\cdot c_u + \left(\frac{e^u-1}{e^u-e^v}\right)\cdot c_v\right]$$

Fazendo $\phi = \dfrac{1-e^v}{e^u-e^v}$, como $1-\phi = 1-\dfrac{1-e^v}{e^u-e^v} = \dfrac{e^u-1}{e^u-e^v}$, vem finalmente

$$\boxed{c = e^{-r\cdot\frac{\tau}{t}}\cdot\left[\phi\cdot c_u + \left(1-\phi\right)\cdot c_v\right]} \qquad (98)$$

Posto isto e em seguida, ir-se-á valorizar uma opção de compra "europeia" sobre futuros de obrigações, mas agora a dois períodos de distância da sua maturidade. Continuando a designar por "F" a cotação actual do futuro[174], então a cotação do futuro dentro de dois períodos de tempo será dada por "$e^{2u}\cdot F$", "$e^{u+v}\cdot F$" ou "$e^{2v}\cdot F$":

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & e^{2u}.F \\
 & & e^{u}.F & \langle & \\
F & \langle & & & e^{u+v}.F \\
 & & e^{v}.F & \langle & \\
 & & & & e^{2v}.F
\end{array}$$

Consequentemente, o valor da call na sua maturidade corresponderá a "c_{uu}", "c_{uv}", "c_{vu}" ou "c_{vv}", tais que:

[174] E assumindo um processo binomial multiplicativo.

$$c_{uu} = \max\left(0, e^{2u} \cdot F - X\right)$$

c_u ⟨

$$c_{uv} = \max\left(0, e^{u+v} \cdot F - X\right)$$

c ⟨

$$c_{vu} = \max\left(0, e^{v+u} \cdot F - X\right)$$

c_v ⟨

$$c_{vv} = \max\left(0, e^{2v} \cdot F - X\right)$$

Por outro lado, como daqui a um período de tempo faltará apenas um período para a maturidade da opção, então[175] os valores possíveis para a opção dentro de um período de tempo são dados por:

$$c_u = e^{-r\cdot\tau/t} \cdot \left[\phi \cdot c_{uu} + (1-\phi) \cdot c_{uv}\right] \qquad \text{ou} \qquad c_v = e^{-r\cdot\tau/t} \cdot \left[\phi \cdot c_{vu} + (1-\phi) \cdot c_{vv}\right]$$

Finalmente, atendendo ao facto de $c_{uv} = c_{vu}$[176] e substituindo as duas equações anteriores na fórmula do valor actual da opção

$$c = e^{-r\cdot\tau/t} \cdot \left[\phi \cdot c_u + (1-\phi) \cdot c_v\right]$$

obtém-se:

$$c = e^{-r\cdot\tau/t} \cdot \left\{\phi \cdot e^{-r\cdot\tau/t} \cdot \left[\phi \cdot c_{uu} + (1-\phi) \cdot c_{uv}\right] + (1-\phi) \cdot e^{-r\cdot\tau/t} \cdot \left[\phi \cdot c_{uv} + (1-\phi) \cdot c_{vv}\right]\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = e^{-r\cdot 2\cdot\tau/t} \cdot \left[\phi^2 \cdot c_{uu} + 2 \cdot \phi \cdot (1-\phi) \cdot c_{uv} + (1-\phi)^2 \cdot c_{vv}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = e^{-r\cdot 2\cdot\tau/t} \cdot \left[\phi^2 \cdot \max\left(0, e^{2u} \cdot F - X\right) + 2 \cdot \phi \cdot (1-\phi) \cdot \max\left(0, e^{u+v} \cdot F - X\right) + (1-\phi)^2 \cdot \max\left(0, e^{2v} \cdot F - X\right)\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$c = e^{-r\cdot 2\cdot\tau/t} \cdot \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} \phi^j \cdot (1-\phi)^{2-j} \cdot \max\left[0, F \cdot e^{j\cdot u + (2-j)\cdot v} - X\right]$$

---

[175] Atendendo à expressão (98).

[176] Pois, u+v = v+u.

Generalizando a análise anterior, isto é, valorizando agora a call a "I" períodos de distância da sua maturidade, obtém-se a fórmula geral de cálculo do valor de uma opção de compra "europeia" sobre futuros de obrigações através do modelo binomial (qualquer que seja o tempo em falta para a maturidade da opção em análise)[177]:

$$\boxed{c = e^{-r \cdot \tau} \cdot \sum_{j=0}^{I} \binom{I}{j} \phi^{j} \cdot (1-\phi)^{I-j} \cdot \max\left[0, F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} - X\right]} \tag{99}$$

sendo $\phi = \dfrac{1-e^{v}}{e^{u}-e^{v}}$

O cálculo do valor de uma opção de compra "europeia" sobre futuros de obrigações através da fórmula (99) consiste na resolução, de forma recursiva, de um mero exercício de programação dinâmica, no qual:

1º) Começa-se por determinar o valor da call na sua maturidade

$$c_{I,j} = \max\left[F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} - X, 0\right] \tag{100}$$

j = 0, 1, ..., I

onde, $c_{I,j}$ representa os valores admissíveis para a call no período $T = t + I \cdot \tau/_{I}$;

2º) E, prossegue-se, através de um processo iterativo, por ordem cronológica inversa e mediante a aplicação da fórmula de recorrência (101)

$$c_{i,j} = e^{-r \cdot \tau/_{I}} \cdot \left[\phi \cdot c_{i+1,j+1} + (1-\phi) \cdot c_{i+1,j}\right] \tag{101}$$

i = 0, 1, ..., I-1
j = 0, 1, ..., i

sendo,

$\phi = \dfrac{1-e^{v}}{e^{u}-e^{v}}$;

$c_{i,j} \equiv$ valor da call no período de tempo $t + i \cdot \tau/_{I}$, para "j" subidas da cotação do futuro;

$c_{i+1,j+1} \equiv$ valor da call no período seguinte, caso a cotação do futuro suba; e

$c_{i+1,j} \equiv$ valor da call no período seguinte, caso a cotação do futuro desça.

[177] Basta substituir na fórmula anterior "2" por "I".

Muito embora a expressão (99) implique a prossecução de um processo de resolução iterativo, no caso das opções de tipo "europeu" o modelo binomial pode ser traduzido por fórmulas de avaliação analíticas fechadas. Com efeito, designando por "a" o número mínimo de subidas da cotação do futuro, durante "I" períodos de tempo, necessário para que a call esteja "in-the-money" na sua maturidade, isto é, sendo "a" o menor número inteiro não negativo para o qual $F \cdot e^{a \cdot u + (I-a) \cdot v} > X \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a > \frac{\ln\left(X/F\right) - I \cdot v}{u - v},$$

ou seja, sendo "a" o menor número inteiro não negativo superior a $\frac{\ln\left(X/F\right) - I \cdot v}{u - v}$ então,

$$\begin{cases} j < a \Rightarrow F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} < X \Rightarrow \max\left[0, F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} - X\right] = 0 \\ j \geq a \Rightarrow F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} > X \Rightarrow \max\left[0, F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} - X\right] = F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} - X \end{cases}$$

pelo que, a expressão (99) pode ser dada por:

$$c = e^{-r \cdot \tau} \cdot \sum_{j=a}^{I} \binom{I}{j} \phi^{j} \cdot (1-\phi)^{I-j} \cdot \left[F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} - X\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$c = e^{-r \cdot \tau} \cdot \left\{ F \cdot \left[\sum_{j=a}^{I} \binom{I}{j} \phi^{j} \cdot (1-\phi)^{I-j} \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v}\right] - X \cdot \left[\sum_{j=a}^{I} \binom{I}{j} \phi^{j} \cdot (1-\phi)^{I-j}\right] \right\} \Leftrightarrow$$

Mas, como:

i) $\sum_{j=a}^{I} \binom{I}{j} \phi^{j} \cdot (1-\phi)^{I-j} = \Phi(a; I, \phi) \equiv$ função complementar da distribuição binomial[178];

ii) $\phi^{j} \cdot (1-\phi)^{I-j} \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} = \left(\phi \cdot e^{u}\right)^{j} \cdot \left[(1-\phi) \cdot e^{v}\right]^{I-j}$;

[178] Probabilidade de a soma de "I" variáveis aleatórias, cada uma podendo apenas assumir os valores "1", com probabilidade "ϕ", ou "0", com probabilidade "(1-ϕ)", ser maior ou igual do que "a".

iii) fazendo $\phi' = \phi \cdot e^u$, vem $1 - \phi' = 1 - \dfrac{1-e^v}{e^u - e^v} \cdot e^u = \dfrac{e^u - 1}{e^u - e^v} \cdot e^v = (1-\phi) \cdot e^v$; e

iv) portanto, $\sum_{j=a}^{I} \binom{I}{j} \phi^j \cdot (1-\phi)^{I-j} \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} = \sum_{j=a}^{I} \binom{I}{j} \phi'^j \cdot (1-\phi')^{I-j} = \Phi(a; I, \phi')$

então, o valor de uma opção de compra "europeia" sobre futuros de obrigações pode ser facilmente obtido via recurso a uma tabela da função complementar da distribuição binomial e utilização da fórmula abaixo exposta.

$\Leftrightarrow$

MODELO BINOMIAL:
OPÇÕES DE COMPRA "EUROPEIAS"
SOBRE FUTUROS DE OBRIGAÇÕES

$$c = \begin{cases} e^{-r \cdot \tau} \cdot \left[F \cdot \Phi(a; I, \phi') - X \cdot \Phi(a; I, \phi) \right] & \Leftarrow a < I \\ 0 & \Leftarrow a > I \end{cases} \quad (102)$$

[179]

sendo,

$$\phi = \frac{1-e^v}{e^u - e^v}$$

$$\phi' = \phi \cdot e^u$$

a ≡ menor número inteiro não negativo superior a

$$\frac{\ln\left(X/F\right) - I \cdot v}{u - v}$$

A título de curiosidade, atente-se na semelhança entre a expressão anterior e a fórmula de Black-Scholes para opções de compra "europeias" sobre futuros de obrigações: a única diferença reside na distribuição de probabilidades considerada.

[179] Pois, se a > I, então a call estará "out-of-the-money" na maturidade.

3.2.2.2.3. Opções de venda "europeias" sobre futuros

O método recursivo de obtenção da fórmula geral[180] de cálculo do valor de uma put "europeia" sobre futuros de obrigações através do modelo binomial é em tudo idêntico ao apresentado no quesito anterior para as respectivas opções de compra, sendo apenas necessário alterar o sinal da diferença entre o preço de exercício e a cotação do futuro correspondente à maturidade da opção. Deste modo, a valorização de uma opção de venda "europeia" sobre futuros de obrigações e a "I" períodos de distância da sua maturidade pode ser realizada através da seguinte fórmula genérica:

$$\boxed{p = e^{-r \cdot \tau} \cdot \sum_{j=0}^{I} \binom{I}{j} \phi^{j} \cdot (1-\phi)^{I-j} \cdot \max\left[0, X - F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v}\right]} \qquad (103)$$

sendo $\phi = \dfrac{1-e^{v}}{e^{u}-e^{v}}$

A forma de resolução da equação anterior é em tudo idêntica à metodologia descrita para as opções de compra, ou seja:

1°) Começa-se por determinar o valor da put na sua maturidade

$$p_{I,j} = \max\left[X - F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v}, 0\right] \qquad (104)$$

j = 0, 1, ..., I

onde, $p_{I,j}$ representa os valores admissíveis para a put no período $T = t + I \cdot \tau/_{I}$;

2°) E, prossegue-se, através de um processo iterativo, por ordem cronológica inversa e mediante a aplicação da fórmula de recorrência (105)

$$p_{i,j} = e^{-r \cdot \tau/_{I}} \cdot \left[\phi \cdot p_{i+1,j+1} + (1-\phi) \cdot p_{i+1,j}\right] \qquad (105)$$

i = 0, 1, ..., I-1
j = 0, 1, ..., i

sendo,

$\phi = \dfrac{1-e^{v}}{e^{u}-e^{v}}$;

$p_{i,j} \equiv$ valor da put no período de tempo $t + i \cdot \tau/_{I}$, para "j" subidas da cotação do futuro;

[180] Isto é, aplicável qualquer que seja o tempo em falta para a maturidade da opção.

$p_{i-1,j+1} \equiv$ valor da put no período seguinte, caso a cotação do futuro suba; e

$p_{i-1,j} \equiv$ valor da put no período seguinte, caso a cotação do futuro desça.

Mais uma vez, também para as opções de venda "europeias" é possível deduzir uma fórmula analítica fechada de avaliação, evitando assim o processo de resolução iterativo descrito anteriormente. Considerando agora que o parâmetro "a" representa o número mínimo de subidas da cotação do futuro, durante "I" períodos de tempo, para o qual a put chega à data de vencimento "out-of-the-money"[181], ou seja, continuando a designar por "a" o menor número inteiro não negativo superior a $\frac{\ln\left(X/F\right) - I\cdot v}{u-v}$, então

$$\begin{cases} j > a \Rightarrow F\cdot e^{j\cdot u+(I-j)\cdot v} > X \Rightarrow \max\left[0, X - F\cdot e^{j\cdot u+(I-j)\cdot v}\right] = 0 \\ j \leq a \Rightarrow F\cdot e^{j\cdot u+(I-j)\cdot v} < X \Rightarrow \max\left[0, X - F\cdot e^{j\cdot u+(I-j)\cdot v}\right] = X - F\cdot e^{j\cdot u+(I-j)\cdot v} \end{cases}$$

pelo que, a expressão (103) é equivalente a

$$p = e^{-r\cdot \tau}\cdot \sum_{j=0}^{a}\binom{I}{j}\phi^{j}\cdot(1-\phi)^{I-j}\cdot\left[X - F\cdot e^{j\cdot u+(I-j)\cdot v}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$p = e^{-r\cdot \tau}\cdot\left\{X\cdot\left[\sum_{j=0}^{a}\binom{I}{j}\phi^{j}\cdot(1-\phi)^{I-j}\right] - F\cdot\left[\sum_{j=0}^{a}\binom{I}{j}\phi^{j}\cdot(1-\phi)^{I-j}\cdot e^{j\cdot u+(I-j)\cdot v}\right]\right\} \Leftrightarrow$$

Mas, como:

i) $\sum_{j=0}^{a}\binom{I}{j}\phi^{j}\cdot(1-\phi)^{I-j} = \sum_{j=0}^{I}\binom{I}{j}\phi^{j}\cdot(1-\phi)^{I-j} - \sum_{j=a}^{I}\binom{I}{j}\phi^{j}\cdot(1-\phi)^{I-j} =$

$$= \Phi(0;I,\phi) - \Phi(a;I,\phi) = 1 - \Phi(a;I,\phi)$$

e

[181] a: $F\cdot e^{a\cdot u+(I-a)\cdot v} > X$.

$$\text{ii)}\ \sum_{j=0}^{a}\binom{I}{j}\phi^{j}\cdot(1-\phi)^{I-j}\cdot e^{j\cdot u+(I-j)\cdot v}=\sum_{j=0}^{a}\binom{I}{j}\phi'^{j}\cdot(1-\phi')^{I-j}\ {}^{182}=$$

$$=\sum_{j=0}^{I}\binom{I}{j}\phi'^{j}\cdot(1-\phi')^{I-j}-\sum_{j=a}^{I}\binom{I}{j}\phi'^{j}\cdot(1-\phi')^{I-j}=$$

$$=\Phi(0;I,\phi')-\Phi(a;I,\phi')=1-\Phi(a;I,\phi')$$

então, a avaliação, através do modelo binomial, de uma opção de venda "europeia" sobre futuros de obrigações pode ser efectuada com base na aplicação directa da fórmula (106).

$\Leftrightarrow$

MODELO BINOMIAL:
OPÇÕES DE VENDA "EUROPEIAS"
SOBRE FUTUROS DE OBRIGAÇÕES

$$p=e^{-r\cdot t}\cdot\left\{X\cdot\left[1-\Phi(a;I,\phi)\right]-F\cdot\left[1-\Phi(a;I,\phi')\right]\right\} \qquad (106)$$

sendo,

$$\phi=\frac{1-e^{v}}{e^{u}-e^{v}}$$

$$\phi'=\phi\cdot e^{u}$$

a $\equiv$ menor número inteiro não negativo superior a

$$\frac{\ln\left(X/F\right)-I\cdot v}{u-v}$$

De igual modo, também no caso das opções de venda "europeias" sobre futuros de obrigações, a única diferença entre as fórmulas subjacentes aos modelos binomial e de Black-Scholes reside no facto de se considerar a função complementar da distribuição binomial ou a distribuição normal reduzida.

---

[182] Fazendo $\phi'=\phi\cdot e^{u}$.

3.2.2.2.4. Opções de compra "americanas" sobre futuros

Em virtude da possibilidade de efectivo exercício antecipado, não é possível obter uma fórmula analítica "fechada" para o valor de uma call "americana" sobre futuros de obrigações, através do modelo binomial. Isto porque, em cada período de tempo compreendido entre as datas de avaliação e de vencimento da call (ou seja, para cada valor de "i") e para cada cenário de evolução da cotação do futuro (isto é, para cada valor de "j"), a determinação do preço da opção envolve a comparação entre o seu *valor intrínseco* e o preço determinado pela média ponderada actualizada dos valores da opção no período de tempo imediatamente seguinte[183].

Consequentemente, para se determinar, através do modelo binomial, o valor de uma opção de compra "europeia" sobre futuros de obrigações:

1°) Começa-se por determinar o valor da call na sua maturidade

$$C_{I,j} = \max\left[F \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v} - X, 0\right] \qquad j = 0, 1, \ldots, I \tag{107}$$

onde, $C_{I,j}$ representa os valores admissíveis para a call no período $T = t + I \cdot \tau/I$;

2°) E, prossegue-se, através de um processo iterativo, por ordem cronológica inversa e mediante a aplicação da fórmula de recorrência (108)

$$C_{i,j} = \max\left\{F \cdot e^{j \cdot u + (i-j) \cdot v} - X, e^{-r \cdot \tau/I} \cdot \left[\phi \cdot C_{i+1,j+1} + (1-\phi) \cdot C_{i+1,j}\right]\right\} \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, I-1 \\ j = 0, 1, \ldots, i \end{array} \tag{108}$$

sendo,

$$\phi = \frac{1 - e^{v}}{e^{u} - e^{v}};$$

$C_{i,j} \equiv$ valor da call no período de tempo $t + i \cdot \tau/I$, para "j" subidas da cotação do futuro;

$C_{i+1,j+1} \equiv$ valor da call no período seguinte, caso a cotação do futuro suba; e

$C_{i+1,j} \equiv$ valor da call no período seguinte, caso a cotação do futuro desça.

[183] Tratando-se de opções "europeias", apenas este último preço é relevante.

3.2.2.2.5. Opções de venda "americanas" sobre futuros

De igual modo e por força da probabilidade de exercício antecipado, o valor de uma put "americana" sobre futuros de obrigações também tem de ser obtido de forma recursiva, começando-se na maturidade da opção e recuando no tempo até ao período de avaliação. Mais ainda, em cada período de tempo e para cada cenário de evolução da cotação do futuro subjacente, há que comparar o preço resultante dos valores que a opção poderá assumir no momento seguinte com o seu *valor intrínseco*.

Portanto, para se determinar, através do modelo binomial, o valor de uma opção de venda "europeia" sobre futuros de obrigações:

1º) Começa-se por determinar o valor da put na sua maturidade

$$\boldsymbol{P_{I,j}} = \max\left[X - \boldsymbol{F} \cdot e^{j \cdot u + (I-j) \cdot v}, 0\right] \qquad j = 0, 1, \ldots, I \tag{109}$$

onde, $P_{I,j}$ representa os valores admissíveis para a put no período $T = t + I \cdot \tau/I$;

2º) E, prossegue-se, através de um processo iterativo, por ordem cronológica inversa e mediante a aplicação da fórmula de recorrência (110)

$$\boldsymbol{P_{i,j}} = \max\left\{X - \boldsymbol{F} \cdot e^{j \cdot u + (i-j) \cdot v}, e^{-r \cdot \tau/I} \cdot \left[\phi \cdot \boldsymbol{P_{i+1,j+1}} + (1-\phi) \cdot \boldsymbol{P_{i+1,j}}\right]\right\} \qquad i = 0, 1, \ldots, I-1; \; j = 0, 1, \ldots, i \tag{110}$$

sendo,

$$\phi = \frac{1 - e^{v}}{e^{u} - e^{v}};$$

$P_{i,j}$ ≡ valor da put no período de tempo $t + i \cdot \tau/I$, para "j" subidas da cotação do futuro;

$P_{i+1,j+1}$ ≡ valor da put no período seguinte, caso a cotação do futuro suba;

$P_{i+1,j}$ ≡ valor da put no período seguinte, caso a cotação do futuro desça.

3.2.2.2.6. Estimação dos parâmetros "u" e "v"

Para determinar o valor de uma opção sobre futuros de obrigações, através do modelo binomial, é necessário conhecer o valor dos parâmetros "u" e "v", pois só assim será possível aplicar:

i) as fórmulas (100) e (101) ou (102), no caso de uma opção de compra "europeia";

ii) as fórmulas (104) e (105) ou (106), no caso de uma opção de venda "europeia";

iii) as fórmulas (107) e (108), tratando-se de uma opção de compra "americana"; e

iv) as fórmulas (109) e (110), tratando-se de uma opção de venda "americana".

Mas, tal não significa que a aplicação do modelo binomial envolva necessariamente a estimação de dois parâmetros. Com efeito, Jarrow e Rudd[184] deduziram fórmulas de determinação dos parâmetros "u" e "v" em função da volatilidade da cotação do futuro subjacente, permitindo assim que a avaliação de uma opção através do modelo binomial envolva somente a estimação de um parâmetro, a saber: o parâmetro "σ^2", à semelhança do que sucede ao nível do modelo de Black-Scholes. E, não obstante o trabalho destes dois autores ter considerado apenas opções sobre activos que verifiquem o pressuposto de não geração de cash flows até à maturidade do contrato, seguidamente provar-se-á que os resultados obtidos são também aplicáveis às opções sobre futuros de obrigações.

Aquando do estudo do modelo de Black-Scholes admitiu-se que a cotação do futuro subjacente seguia um processo estocástico do tipo

$$dF = \gamma(F,t)\cdot F\cdot dt + \sigma(F,t)\cdot F\cdot dZ \quad \text{com } dZ \cap N\left(0,\sqrt{dt}\right),$$

o que é equivalente a pressupor que a cotação do futuro na maturidade possui uma distribuição lognormal, isto é, que[185]

$$\ln\left(\frac{F_T}{F_t}\right) = \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\tau + \sigma\cdot\sqrt{\tau}\cdot Z^{186} \qquad \text{com } Z \cap N(0,1)$$

Mas, por outro lado, o modelo binomial admite que a cotação do futuro na maturidade possui uma distribuição binomial:

---

[184] Jarrow, R., e A. Rudd, *Option Pricing*, Dow Jones - Irwin, 1983, pp. 183-86.

[185] Vide ponto 3.2.2.1.

[186] De facto, como $E\left[\ln\left(\frac{F_T}{F_t}\right)\right] = \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\tau \Leftrightarrow E(\ln F_T) = \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\tau + \ln F_t$ e

$VAR\left[\ln\left(\frac{F_T}{F_t}\right)\right] = \sigma^2\cdot\tau \Leftrightarrow VAR(\ln F_T) = \sigma^2\cdot\tau$, então

$\ln F_T \cap N\left(\ln F_t + \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot\tau, \sigma\cdot\sqrt{\tau}\right)$, isto é, $\ln F_T$ possui uma distribuição normal, e portanto F_T possui uma distribuição lognormal.

$$F_T = F_t \cdot e^{j \cdot u + (I - j) \cdot v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln F_T = \ln F_t + \left[j \cdot u + (I - j) \cdot v \right] \Leftrightarrow \ln\left(\frac{F_T}{F_t} \right) = I \cdot v + (u - v) \cdot j$$

Então, o raciocínio de Jarrow e Rudd consistiu em desenvolver fórmulas para os parâmetros "u" e "v" tais que a distribuição binomial de F_T convirja para a distribuição lognormal de F_T, à medida que $I \to +\infty$. Ora, tal objectivo é atingido fazendo com que os dois primeiros momentos (média e variância) das duas distribuições coincidam[187].

A variável aleatória "j" representa o número de subidas da cotação do futuro subjacente ocorrido durante os "I" periodos até à maturidade da opção, pelo que

$$j \frown b(j; I, q)$$

ou seja,

$$b(j; I, q) = \begin{cases} \binom{I}{j} \cdot q^j \cdot (1-q)^{I-j} & \Leftarrow j = 0, 1, \ldots, I \\ 0 & \Leftarrow \text{outros valores de "j"} \end{cases}$$

sendo, portanto

$$E(j) = I \cdot q \qquad \wedge \qquad VAR(j) = I \cdot q \cdot (1-q)$$

Assim, tendo em consideração que $j \frown b(j; I, q)$ e fazendo $I \to +\infty$, pode-se aplicar o *Teorema de DeMoivre-Laplace*, obtendo-se

$$\frac{j - I \cdot q}{\sqrt{I \cdot q \cdot (1-q)}} \dot{\frown} N(0,1)$$

Mas, como "q" é uma constante independente de "I", então o resultado anterior mantém-se para qualquer valor de "q", razão pela qual é possível escolher arbitrariamente um valor para "q". Por uma questão de simplicidade, faça-se q = 1/2, de onde decorre que

$$\frac{j - I/2}{\sqrt{I}/2} \dot{\frown} N(0,1) \qquad \Rightarrow \qquad j \dot{\frown} N\left(I/2, \sqrt{I}/2 \right)$$

[187] Cox, Ross e Rubinstein propõem formas de obtenção dos parâmetros "u" e "v" bastante mais simples do que as fórmulas deduzidas por Jarrow e Rudd. Todavia, o procedimento seguido pelos três primeiros autores apenas assegura a convergência do segundo momento das duas distribuições no limite.

Por outro lado, como também

$$\sqrt{I}/2 \cdot Z + I/2 \cap N\left(I/2, \sqrt{I}/2\right) \qquad \text{com } Z \cap N(0,1)$$

logo, pode-se substituir "j" por "$\sqrt{I}/2 \cdot Z + I/2$" na expressão $\ln\left(F_T/F_t\right) = I \cdot v + (u - v) \cdot j$, obtendo-se:

$$\ln\left(F_T/F_t\right) = \left[I \cdot v + (u - v) \cdot I/2\right] + (u - v) \cdot \sqrt{I}/2 \cdot Z$$

Concluindo, para que a distribuição binomial de F_T convirja para a distribuição lognormal de F_T

$$\ln\left(F_T/F_t\right) = \left(\gamma - \sigma^2/2\right) \cdot \tau + \sigma \cdot \sqrt{\tau} \cdot Z$$

é necessário que:

$$\begin{cases} I \cdot v + (u - v) \cdot I/2 = \left(\gamma - \sigma^2/2\right) \cdot \tau \\ (u - v) \cdot \sqrt{I}/2 = \sigma \cdot \sqrt{\tau} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior em ordem aos parâmetros "u" e "v", obtém-se:

$$\begin{cases} u = \left(\gamma - \sigma^2/2\right) \cdot \tau/I + \sigma \cdot \sqrt{\tau/I} \\ v = \left(\gamma - \sigma^2/2\right) \cdot \tau/I - \sigma \cdot \sqrt{\tau/I} \end{cases}$$

Finalmente, considerando o argumento de neutralidade face ao risco, isto é, fazendo γ = r, vêm as seguintes fórmulas de cálculo dos parâmetros "u" e "v":

$$\boxed{\boldsymbol{u = \left(r - \sigma^2/2\right) \cdot \tau/I + \sigma \cdot \sqrt{\tau/I}}} \qquad (111)$$

$$\boxed{\boldsymbol{v = \left(r - \sigma^2/2\right) \cdot \tau/I - \sigma \cdot \sqrt{\tau/I}}} \qquad (112)$$

Com base no conhecimento das duas últimas expressões, a estimação do valor de uma opção sobre futuros de obrigações através do modelo binomial passa, na prática, pelas seguintes etapas:

1º) Estimação do parâmetro σ^2, de acordo com a metodologia descrita no quesito 3.1.6;

2º) Determinação dos valores de "u" e "v" através das fórmulas (111) e (112); e

3º) Cálculo do valor da opção, mediante o recurso

- **às fórmulas (100) e (101) ou (102), no caso de uma opção de compra "europeia";**
- **às fórmulas (104) e (105) ou (106), no caso de uma opção de venda "europeia";**
- **às fórmulas (107) e (108), tratando-se de uma opção de compra "americana";**
- **às fórmulas (109) e (110), tratando-se de uma opção de venda "americana".**

Por último, registe-se que a grande vantagem do modelo binomial consiste no facto de poder ser aplicado à avaliação de opções "americanas" sobre futuros de obrigações, ao contrário do que sucede com o modelo de Black-Scholes e com o método de simulação de Monte Carlo (em virtude da sua reduzidissima operacionalidade). Mesmo assim, é ainda possível utilizar outros métodos de avaliação de opções "americanas" sobre futuros de obrigações que forneçam estimativas mais eficientes ("método das diferenças finitas") ou que sejam de aplicação mais rápida ("aproximação quadrática" ou "aproximação polinomial") do que o modelo binomial.

3.2.2.2.7. Técnica da variante de controle

Tal como para o método de simulação de Monte Carlo, o grau de precisão da estimativa do valor de uma opção fornecida pelo modelo binomial pode ser incrementado mediante a aplicação da técnica de variante de controle:

$$\boxed{\hat{V}_t^c(A) = \hat{V}_t(A) - \hat{V}_t(B) + V_t(B)} \tag{113}$$

sendo,

A ≡ opção sob avaliação;

B ≡ opção similar à opção A, mas cujo valor hoje -$V_t(B)$- seja conhecido;

$\hat{V}_t^c(A)$ ≡ estimativa do valor da opção A obtida através da técnica da variante de controle;

$\hat{V}_t(A) \equiv$ estimativa do valor da opção A obtida através da aplicação do modelo binomial, conforme descrito nas três etapas anteriores;

$\hat{V}_t(B) \equiv$ estimativa do valor da opção B obtida através da aplicação do modelo binomial, conforme descrito nas três etapas anteriores; e

$V_t(B) \equiv$ valor conhecido para a opção B no momento "t" (preço de mercado ou solução fornecida por uma fórmula de avaliação analítica fechada).

3.2.2.3. Método numérico das Diferenças Finitas[188]

O método numérico das diferenças finitas baseia-se na resolução da equação diferencial fundamental do valor da opção em análise, sujeita às respectivas restrições, mediante a substituição (aproximação) das derivadas parciais por diferenças finitas. Desta forma, transforma-se a equação diferencial num conjunto de equações às diferenças, as quais são resolvidas de forma iterativa.

Como o objectivo deste ponto do trabalho reside na aplicação do método das diferenças finitas à avaliação de opções "americanas" sobre futuros de obrigações, então a equação diferencial em causa é dada pela expressão (71), isto é,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial F^2}\cdot\sigma^2\cdot F^2+\frac{\partial V}{\partial t}-r\cdot V=0.$$

No entanto, para aproximar as derivadas parciais da anterior equação diferencial parabólica através de diferenças finitas, é necessário considerar um número discreto (finito) de valores para as variáveis "F" e "t", ou seja, há que trabalhar num espaço (F,t) hiperplano. Assim, considere-se que a variável "F" pode assumir "n+1" valores discretos, sendo a diferença entre quaisquer dois valores consecutivos dada por "h", isto é, admita-se que o conjunto de valores discretos que a variável "F" pode assumir é dado por

$$F_i = i\cdot h \qquad \text{com } i = 0, ..., n$$

e em que,

$F_0 = 0$[189];

$F_n \equiv$ cotação do futuro acima da qual V_F[190] tende para zero, no caso de uma put, ou para a unidade, tratando-se de uma call[191];

$h=(F_n-F_0)/n=F_n/n$; e

a cotação actual do futuro há-de estar algures entre os valores F_0 e F_n.

Por seu turno, admita-se que a variável "t" pode assumir "m+1" valores discretos, sendo a diferença entre quaisquer dois valores consecutivos dada por "k", ou seja, considere-se que o conjunto finito de valores que a variável "t" pode assumir é dado por

$$t_j = j\cdot k \qquad \text{com } j = 0, ..., m$$

e em que,

---

[188] A aplicação do método das diferenças finitas à avaliação de opções foi inicialmente levada a cabo por E. S. Schwartz no artigo "The valuation of warrants: implementing a new approach", *Journal of Financial Economics*, nº 4, 1977, pp 79-93.

[189] Valor mínimo que a variável "F" pode assumir.

[190] $V_F=\partial V/\partial F$. Por uma questão de conveniência, passar-se-á a utilizar indiferentemente a notação $\partial y/\partial x$ ou y_x.

[191] Trata-se, portanto, do valor máximo que a variável "F" pode assumir.

$t_0 \equiv$ data de avaliação;

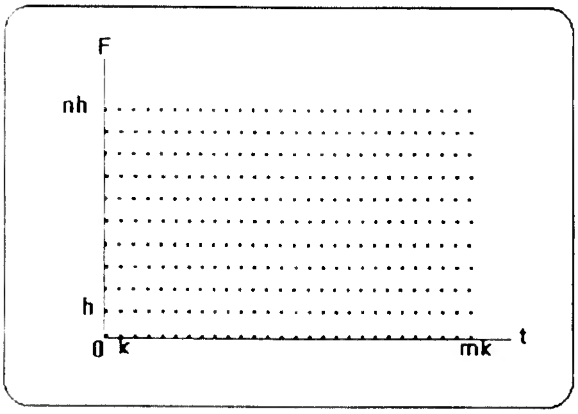
$t_m = T \equiv$ maturidade da opção; e

$k = (t_m - t_0)/m$.

Assim sendo, então

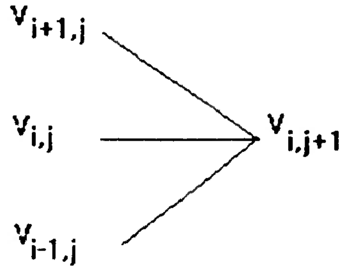
$$V(F,t) = V(F_i, t_j) = V_{i,j}$$

em que $V_{i,j}$ representa o valor da opção no ponto (i,j) -isto é, no período de tempo t_j e para uma cotação do futuro igual a F_i- pertencente a uma grelha de (n+1)x(m+1) pontos:



3.2.2.3.1. Aproximação Implícita às Diferenças Finitas

Uma forma de aproximação às diferenças finitas, designada por "aproximação implícita", consiste em relacionar cada valor da opção no momento t_{j+1} com três valores alternativos para a opção no momento t_j:



Para o efeito, há que substituir as derivadas parciais da equação diferencial em análise pelas seguintes diferenças finitas:

i) $V_{FF} = \left(V_{i+1,j} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i-1,j}\right)/h^2$ [192] e

ii) $V_t = \left(V_{i,j+1} - V_{i,j}\right)/k$ [193].

Substituindo as duas expressões anteriores na fórmula (71), obtém-se uma equação às diferenças que constitui uma aproximação implícita a essa mesma equação diferencial:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{V_{i+1,j} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} \cdot \sigma^2 \cdot (i \cdot h)^2 + \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{k} - r \cdot V_{i,j} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

APROXIMAÇÃO IMPLÍCITA ÀS DIFERENÇAS FINITAS DO VALOR DE UMA OPÇÃO SOBRE FUTUROS

$$a_i \cdot V_{i-1,j} + b_i \cdot V_{i,j} + c_i \cdot V_{i+1,j} = V_{i,j+1} \qquad (114)$$

i = 1, ..., n-1
j = 0, ..., m-1

sendo,

$$a_i = -\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot i^2 \cdot k$$

$$b_i = \sigma^2 \cdot i^2 \cdot k + 1 + r \cdot k$$

$$c_i = -\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot i^2 \cdot k$$

---

[192] Esta aproximação resulta da substituição inicial de V_{FF} por uma diferença finita "forward",

$$V_{FF} = \left(V_{F\,i+1,j} - V_{F\,i,j}\right)/h$$

e posterior substituição de V_F por diferenças finitas "backward",

$$V_{FF} = \left[\left(V_{i+1,j} - V_{i,j}\right)/h - \left(V_{i,j} - V_{i-1,j}\right)/h\right]/h.$$

[193] Para obter uma "aproximação implícita", ou seja, para relacionar o valor da opção no período t_{j+1} com o seu valor no momento t_j, há que aproximar V_t através de uma diferença finita "forward".

Portanto, para se obter o valor de uma opção "americana" sobre futuros de obrigações basta, ao invés de solucionar a equação diferencial (71), resolver de forma iterativa a equação às diferenças (114). Ora, é precisamente tal método de resolução iterativa da equação (114) que irá ser descrito seguidamente.

Antes de mais, repare-se que embora para cada valor de "j" seja necessário resolver $(n-1)$ equações lineares com $(n+1)$ incógnitas $V_{i,j}$ (i = 0, ..., n), as restrições à equação diferencial fundamental (71), próprias de cada tipo de opção, indicam os valores extremos $V_{0,j}$ e $V_{n,j}$ para cada problema e portanto constituem as duas equações adicionais necessárias para obter os valores das $(n-1)$ incógnitas para cada valor de "j":

- opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$\boxed{V_{0,j} = 0 \quad \text{para } j = 0, \ldots, m} \tag{115}$$

[194]

$$\boxed{V_{n,j} - V_{n-1,j} = h \quad \text{para } j = 0, \ldots, m} \tag{116}$$

[195]

- opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$\boxed{V_{0,j} = X \quad \text{para } j = 0, \ldots, m} \tag{117}$$

[196]

sendo, X ≡ preço de exercício da put

$$\boxed{V_{n,j} - V_{n-1,j} = 0 \quad \text{para } j = 0, \ldots, m} \tag{118}$$

[197]

---

[194] Pois, V = 0 para F = 0, no caso de uma call.

[195] Uma vez que, $\lim_{F \to +\infty} V_F(F,t) \cong \left(V_{n,j} - V_{n-1,j}\right)/h = 1$, onde V representa o valor de uma call.

[196] Pois, V = X para F = 0, tratando-se de uma opção de venda.

[197] Dado que, $\lim_{F \to +\infty} V_F(F,t) \cong \left(V_{n,j} - V_{n-1,j}\right)/h = 0$, onde V representa o valor de uma put.

No que concerne à metodologia de resolução da equação (114), o problema de determinação do valor de uma opção "americana" sobre futuros de obrigações é inicializado na data de vencimento da opção (isto é, para j = m), visto os valores $V_{i,m}$ serem conhecidos:

- opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$V_{i,m} = \begin{cases} i \cdot h - X \Leftarrow i \geq X/h \\ 0 \qquad \Leftarrow i < X/h \end{cases} \quad i = 0, \ldots, n \tag{119}$$

- opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$V_{i,m} = \begin{cases} X - i \cdot h \Leftarrow i \leq X/h \\ 0 \qquad \Leftarrow i > X/h \end{cases} \quad i = 0, \ldots, n \tag{120}$$

Posto isto, a determinação do valor da opção prossegue iterativamente e por ordem cronológica inversa (ou seja, aumentando o tempo em falta para a maturidade da opção) para os diversos valores admissíveis para a cotação do futuro, com base na equação (114) e mediante o recurso às expressões (115) e (116) ou (117) e (118). No caso das opções de tipo "americano" é ainda necessário impor, em cada etapa do processo iterativo de resolução, a observância das condições de exercício antecipado:

- opções de compra "americanas"

$$V_{i,j} = \max\left[\left(V_{i,j+1} - a_i \cdot V_{i-1,j} - c_i \cdot V_{i+1,j}\right)/b_i, i \cdot h - X\right] \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n-1 \\ j = 0, \ldots, m-1 \end{matrix} \tag{121}$$

- opções de venda "americanas"

$$V_{i,j} = \max\left[\left(V_{i,j+1} - a_i \cdot V_{i-1,j} - c_i \cdot V_{i+1,j}\right)/b_i, X - i \cdot h\right] \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n-1 \\ j = 0, \ldots, m-1 \end{matrix} \tag{121}$$

O processo de resolução só termina depois de calculados os valores $V_{1,\bullet}$, $V_{2,\bullet}$, ..., $V_{n-1,\bullet}$.

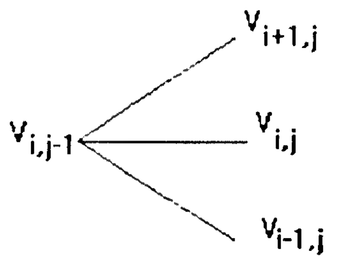
Por seu turno, o desejado preço da opção em análise corresponderá ao valor $V_{i,\bullet}$, tal que

i.h ≡ cotação actual do futuro.

O grande problema associado à avaliação de opções "americanas" sobre futuros de obrigações através de uma "aproximação implícita" às diferenças finitas reside no facto de esta última se revelar pouco operacional, na medida em que requer a resolução simultânea de (n-1) equações lineares (para além das restrições aos valores $V_{0,j}$ e $V_{n,j}$) para cada valor de "j". Consequentemente, regra geral o método das diferenças finitas é utilizado através da denominada "aproximação explícita".

3.2.2.3.2. Aproximação Explícita às Diferenças Finitas

A "aproximação explícita" às diferenças finitas consiste em relacionar cada valor da opção num determinado momento (t_{j-1}) com três valores alternativos para a opção no momento seguinte (t_j):



Neste caso, é necessário substituir as derivadas parciais da equação (71) pelas seguintes diferenças finitas:

i) $V_{FF} = \left(V_{i+1,j} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i-1,j}\right)/h^2$; e

ii) $V_t = \left(V_{i,j} - V_{i,j-1}\right)/k$ [198].

[198] A aproximação de $\partial V/\partial t$ através de uma diferença finita "backward" constitui a única alteração relativamente à metodologia apresentada anteriormente e tem por objectivo relacionar o valor da opção no período t_{j-1} com o seu valor no período seguinte (t_j).

Mais uma vez, substituindo as duas expressões anteriores na equação diferencial (71) obtém-se uma equação às diferenças (ou melhor, um conjunto de sistemas de equações) que constitui uma "aproximação explícita" à equação diferencial mencionada:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{V_{i+1,j}-2\cdot V_{i,j}+V_{i-1,j}}{h^2}\cdot\sigma^2\cdot(i\cdot h)^2+\frac{V_{i,j}-V_{i,j-1}}{k}-r\cdot V_{i,j}=0$$

$$\Updownarrow$$

APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA ÀS DIFERENÇAS FINITAS DO VALOR DE UMA OPÇÃO SOBRE FUTUROS

$$V_{i,j-1}=a_i\cdot V_{i-1,j}+b_i\cdot V_{i,j}+c_i\cdot V_{i+1,j} \qquad (122)$$

i = 1, ... n-1
j = 1, ... m

sendo,

$$a_i=\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot i^2\cdot k$$

$$b_i=1-\sigma^2\cdot i^2\cdot k-r\cdot k$$

$$c_i=\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot i^2\cdot k$$

Relativamente ao processo de resolução da equação (122), **a determinação do valor de uma opção "americana" sobre futuros de obrigações parte da sua data de vencimento ($j=m$), uma vez que o conjunto de valores $V_{i,m}$ é conhecido:**

- opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$V_{i,m}=\begin{cases} i\cdot h-X \Leftarrow i\geq X/h \\ 0 \qquad \Leftarrow i< X/h\end{cases} \qquad i = 0, ..., n$$

- opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$V_{i,m}=\begin{cases} X-i\cdot h \Leftarrow i\leq X/h \\ 0 \qquad \Leftarrow i> X/h\end{cases} \qquad i = 0, ..., n$$

Tal como anteriormente, a resolução do problema prossegue iterativamente e por ordem cronológica inversa, mediante a utilização, para valores de "j" sucessivamente menores, da equação (122) e das expressões (115) e (116), no caso das opções de compra

$$V_{0,j} = 0 \qquad j = 0, ..., m$$

$$V_{n,j} - V_{n-1,j} = h \qquad j = 0, ..., m,$$

ou das fórmulas (117) e (118), tratando-se de opções de venda

$$V_{0,j} = X \qquad j = 0, ..., m$$

$$V_{n,j} - V_{n-1,j} = 0 \qquad j = 0, ..., m.$$

Repare-se que, tal como acontecia com a "aproximação implícita", com o procedimento agora descrito também se obtêm (n-1) equações lineares para cada valor de "j" (para além das restrições aos valores $V_{0,j}$ e $V_{n,j}$). Não obstante e ao contrário do que anteriormente sucedia, tal sistema de equações não necessita de ser resolvido em simultâneo. De facto, esta é a característica especifica da "aproximação explícita" que a torna bastante mais operacional.

Tratando-se de opções "americanas", em cada etapa do processo iterativo de resolução, é ainda necessário impor a observância das seguintes condições de exercício antecipado:

- opções de compra "americanas"

$$\boxed{\begin{gathered} V_{i,j-1} = \max\left[\left(a_i \cdot V_{i-1,j} + b_i \cdot V_{i,j} + c_i \cdot V_{i+1,j}\right), i \cdot h - X\right] \\ i = 1, ..., n-1 \\ j = 1, ..., m \end{gathered}} \qquad (123)$$

- opções de venda "americanas"

$$\boxed{\begin{gathered} V_{i,j-1} = \max\left[\left(a_i \cdot V_{i-1,j} + b_i \cdot V_{i,j} + c_i \cdot V_{i+1,j}\right), X - i \cdot h\right] \\ i = 1, ..., n-1 \\ j = 1, ..., m \end{gathered}} \qquad (124)$$

Comparando as duas formas de aproximação às diferenças finitas que acabaram de ser analisadas, pode-se afirmar que, em princípio, é preferível adoptar o método das diferenças finitas explícitas, visto este ser mais fácil de implementar do que a versão implícita alternativa.

Contudo, a grande desvantagem do método das diferenças finitas explícitas consiste no facto de a solução numérica não convergir necessariamente para a solução da equação diferencial, à medida que "h" e "k" tendem para zero. Por esta razão e como, por outro lado, se prova que através da transformação logarítmica da versão explícita do método das diferenças finitas é possível definir à partida os valores de "h" e "k" que garantem a convergência do valor estimado da opção para o seu verdadeiro valor, então é muitas vezes aconselhável recorrer a esta mesma transformação.

3.2.2.3.3. Transformação logarítmica do método das diferenças finitas

Agora, o objectivo consiste em adaptar a equação diferencial (71) de forma a que os seus coeficientes sejam constantes, facilitando assim a análise numérica. Para o efeito, a transformação a efectuar deverá consistir na consideração de uma nova variável de estado -Y- cujo desvio padrão instantâneo seja constante.

Deste modo, sendo

$$dF = \gamma(F,t)\cdot F\cdot dt + \sigma(F,t)\cdot F\cdot dZ,$$

considerando

$$Y = Y(F, t)$$

e aplicando o *Lema de ITO*, vem

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial F}\cdot\gamma\cdot F + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial F^2}\cdot\sigma^2\cdot F^2\right)\cdot dt + \frac{\partial Y}{\partial F}\cdot\sigma\cdot F\cdot dZ$$

Portanto, para que "$\partial Y/\partial F\cdot\sigma\cdot F$" seja constante, por exemplo igual a σ, é necessário que $\partial Y/\partial F = 1/F$ e consequentemente, faz sentido que a transformação a efectuar consista em considerar Y = lnF.

Na verdade, fazendo

$$\begin{cases} Y = \ln F \\ W(Y,t) = V(F,t) \end{cases}$$

então,

$$V_F = W_Y\cdot F^{-1} = W_Y\cdot e^{-\ln F} = W_Y\cdot e^{-Y},$$

$$V_{FF} = W_{YY} \cdot e^{-Y} \cdot e^{-Y} + W_Y \cdot \left(-e^{-Y}\right) \cdot F^{-1} = W_{YY} \cdot e^{-2Y} - W_Y \cdot e^{-Y} \cdot e^{-Y} = \left(W_{YY} - W_Y\right) \cdot e^{-2Y} \quad \text{e}$$

$$V_t = W_t$$

pelo que, a transformação logarítmica da equação diferencial (71)

$$\frac{1}{2} \cdot V_{FF} \cdot \sigma^2 \cdot F^2 + V_t - r \cdot V = 0$$

vem igual a:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(W_{YY} - W_Y\right) \cdot e^{-2Y} \cdot \sigma^2 \cdot e^{2Y} + W_t - r \cdot W = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot W_{YY} - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot W_Y + W_t - r \cdot W = 0$$

Posto isto, basta aplicar o método das diferenças finitas à equação anterior para se obter o valor desejado para a opção[199], sendo para tal necessário considerar que o conjunto de valores discretos que as variáveis "Y" e "t" podem assumir é dado por:

$$Y_i = i \cdot h \qquad \text{com } i = 0, \ldots, n$$

e

$$t_j = j \cdot k \qquad \text{com } j = 0, \ldots, m.$$

Consequentemente,

$$W(Y,t) = W\left(Y_i, t_j\right) = W_{i,j}$$

3.2.2.3.3.1. Versão implícita da transformação logarítmica do método das diferenças finitas

Considerando a igualdade $W(Y,t) = W_{i,j}$ bem como a transformação logarítmica dada pela equação

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot W_{YY} - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot W_Y + W_t - r \cdot W = 0$$

e substituindo nesta última as suas derivadas parciais pelas diferenças finitas

[199] Visto que, W = V.

$W_Y = \left(W_{i+1,j} - W_{i-1,j}\right)/2h$,[200]

$W_{YY} = \left(W_{i+1,j} - 2 \cdot W_{i,j} + W_{i-1,j}\right)/h^2$ e

$W_t = \left(W_{i,j+1} - W_{i,j}\right)/k$,

obtém-se um conjunto de sistemas de equações lineares às diferenças, com coeficientes constantes, o que constitui uma aproximação implícita à transformação logarítmica da equação diferencial fundamental:

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{W_{i+1,j} - 2W_{i,j} + W_{i-1,j}}{h^2} - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{W_{i+1,j} - W_{i-1,j}}{2h} + \frac{W_{i,j+1} - W_{i,j}}{k} - r \cdot W_{i,j} = 0$$

$$\Updownarrow$$

TRANSFORMAÇÃO LOGARÍTMICA DA APROXIMAÇÃO IMPLÍCITA ÀS DIFERENÇAS FINITAS DO VALOR DE UMA OPÇÃO SOBRE FUTUROS

$$\boldsymbol{a \cdot W_{i-1,j} + b \cdot W_{i,j} + c \cdot W_{i+1,j} = W_{i,j+1}} \qquad (125)$$

i = 1, ..., n-1
j = 0, ..., m-1

sendo,

$$\boldsymbol{a = -\frac{(2+h) \cdot \sigma^2 \cdot k}{4h^2}}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{\sigma^2 \cdot k + h^2 - r \cdot k \cdot h^2}{h^2}}$$

$$\boldsymbol{c = \frac{(h-2) \cdot \sigma^2 \cdot k}{4h^2}}$$

[200] Trata-se de uma diferença finita "centrada", isto é, da média aritmética simples entre uma diferença finita "forward" e uma diferença finita "backward":

$$W_Y = \frac{\left(W_{i+1,j} - W_{i,j}\right)/h + \left(W_{i,j} - W_{i-1,j}\right)/h}{2}$$

O método de resolução é idêntico ao descrito anteriormente, havendo somente que ajustar as condições terminais ($W_{i,m}$)

- opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$W_{i,m} = \begin{cases} e^{i \cdot h} - X \Leftarrow i \geq \ln X / h \\ 0 \qquad \Leftarrow i < \ln X / h \end{cases} \quad i = 0, \ldots, n^{201} \tag{126}$$

- opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$W_{i,m} = \begin{cases} X - e^{i \cdot h} \Leftarrow i \leq \ln X / h \\ 0 \qquad \Leftarrow i > \ln X / h \end{cases} \quad i = 0, \ldots, n \tag{127}$$

bem como as restrições aos valores extremos da opção ($W_{0,j}$ e $W_{n,j}$)

- opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$W_{0,j} = 0^{202} \quad \text{para} \quad j = 0, \ldots, m \tag{128}$$

$$W_{n,j} = e^{n \cdot h} - X^{203} \quad \text{para} \quad j = 0, \ldots, m \tag{129}$$

sendo, X ≡ preço de exercício da call

---

[201] Pois, $W_{i,m} = V_{i,m}$ e $Y = \ln F \Leftrightarrow \ln F = i \cdot h \Leftrightarrow F = e^{i \cdot h}$.

[202] Dado que, $W_{0,j} = W(0,t) = V(1,t) \cong V(0,t)$ e $V(0,t) = 0$ para uma opção de compra.

[203] Pois, $W_{n,j} = W(+\infty, t) = V(+\infty, t)$ e o preço de uma call coincide com o seu *valor intrinseco* quando $F \rightarrow +\infty$.

- opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$W_{0,j} = X$$ [204]

para $j = 0, \ldots, m$

sendo, $X \equiv$ preço de exercício da put

(130)

$$W_{n,j} = 0$$ [205]

para $j = 0, \ldots, m$

(131)

Ou seja, o problema é inicializado na data de vencimento da opção, através das expressões (126) ou (127), prosseguindo-se iterativamente e por ordem cronológica inversa, mediante a utilização da equação (125) e das expressões (128) e (129), no caso das opções de compra, ou das expressões (130) e (131), caso se tratem de opções de venda. De igual modo, tratando-se de opções "americanas", em cada etapa do processo iterativo de resolução é ainda necessário impor a observância das seguintes condições de exercício antecipado:

- opções de compra "americanas"

$$W_{i,j} = \max\left[\left(W_{i,j+1} - a \cdot W_{i-1,j} - c \cdot W_{i+1,j}\right)/b, e^{i \cdot h} - X\right]$$

$i = 1, \ldots, n-1$
$j = 0, \ldots, m-1$

(132)

- opções de venda "americanas"

$$W_{i,j} = \max\left[\left(W_{i,j+1} - a \cdot W_{i-1,j} - c \cdot W_{i+1,j}\right)/b, X - e^{i \cdot h}\right]$$

$i = 1, \ldots, n-1$
$j = 0, \ldots, m-1$

(133)

---

[204] Uma vez que, $W_{0,j} = W(0,t) = V(1,t) \cong V(0,t)$ e o valor de uma opção de venda corresponde ao seu preço de exercicio quando $F \cong 0$.

[205] Visto que, $W_{n,j} = W(+\infty,t) = V(+\infty,t)$ e o valor de uma put tende para zero à medida que $F \to +\infty$.

Mas, apesar dos coeficientes serem agora constantes, ainda é necessário proceder à resolução simultânea de (n-1) equações para cada valor atribuído a "j", razão pela qual é comum optar-se pela transformação logarítmica à versão explícita do método das diferenças finitas.

3.2.2.3.3.2. Versão explícita da transformação logarítmica do método das diferenças finitas

Substituindo as derivadas parciais da equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot W_{YY}-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot W_Y+W_t-r\cdot W=0$$

pelas diferenças finitas

$W_Y=\left(W_{i+1,j}-W_{i-1,j}\right)/2h$,

$W_{YY}=\left(W_{i+1,j}-2\cdot W_{i,j}+W_{i-1,j}\right)/h^2$ e

$W_t=\left(W_{i,j}-W_{i,j-1}\right)/k$,[206]

e tendo em conta a igualdade $W(Y,t)=W_{i,j}$, obtém-se a seguinte aproximação explícita à transformação logarítmica da equação diferencial anterior:

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\frac{W_{i+1,j}-2W_{i,j}+W_{i-1,j}}{h^2}-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\frac{W_{i+1,j}-W_{i-1,j}}{2h}+\frac{W_{i,j}-W_{i,j-1}}{k}-r\cdot W_{i,j}=0$$

$$\Updownarrow$$

[206] Única diferença relativamente à versão anterior.

TRANSFORMAÇÃO LOGARÍTMICA DA APROXIMAÇÃO EXPLÍCITA ÀS DIFERENÇAS FINITAS DO VALOR DE UMA OPÇÃO SOBRE FUTUROS

$$W_{i,j-1} = a \cdot W_{i-1,j} + b \cdot W_{i,j} + c \cdot W_{i+1,j} \tag{134}$$

i = 1, ..., n-1
j = 1, ..., m

sendo,

$$a = \frac{(2+h)\cdot\sigma^2\cdot k}{4h^2}$$

$$b = \frac{h^2 - r\cdot k\cdot h^2 - \sigma^2\cdot k}{h^2}$$

$$c = \frac{(2-h)\cdot\sigma^2\cdot k}{4h^2}$$

O método de resolução da equação anterior é semelhante ao enunciado para a versão implícita da transformação logarítmica, ou seja, o problema é inicializado na data de vencimento da opção, através das expressões (126) ou (127)

- opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$W_{i,m} = \begin{cases} e^{i\cdot h} - X & \Leftarrow i \geq \ln X/h \\ 0 & \Leftarrow i < \ln X/h \end{cases} \qquad i = 0, ..., n$$

- opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$W_{i,m} = \begin{cases} X - e^{i\cdot h} & \Leftarrow i \leq \ln X/h \\ 0 & \Leftarrow i > \ln X/h \end{cases} \qquad i = 0, ..., n,$$

prosseguindo-se iterativamente e por ordem cronológica inversa, mediante a utilização da equação (134) e das expressões (128) e (129)

- opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$W_{0,j} = 0 \qquad \text{para} \quad j = 0, ..., m$$

$$W_{n,j} = e^{n\cdot h} - X \qquad \text{para} \quad j = 0, ..., m$$

ou das expressões (130) e (131)

- opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$W_{0,j} = X \qquad \text{para} \quad j = 0, ..., m$$

$$W_{n,j} = 0 \qquad \text{para} \quad j = 0, ..., m$$

impondo, em cada etapa do processo iterativo de resolução e tratando-se de opções de tipo "americano", a observância das seguintes condições de exercício antecipado:

- opções de compra "americanas"

$$W_{i,j-1} = \max\left[\left(a \cdot W_{i-1,j} + b \cdot W_{i,j} + c \cdot W_{i+1,j}\right), e^{i \cdot h} - X\right] \qquad i = 1, ..., n-1 \quad j = 1, ..., m \tag{135}$$

- opções de venda "americanas"

$$W_{i,j-1} = \max\left[\left(a \cdot W_{i-1,j} + b \cdot W_{i,j} + c \cdot W_{i+1,j}\right), X - e^{i \cdot h}\right] \qquad i = 1, ..., n-1 \quad j = 1, ..., m \tag{136}$$

A grande vantagem associada à consideração de uma transformação logarítmica ao nível da versão explícita do método das diferenças finitas, para além da simplicidade resultante da utilização de coeficientes constantes, reside essencialmente no facto de Hull e White[207] provarem que a estabilidade e convergência da solução numérica requer somente a satisfação das duas condições seguintes:

$$\begin{cases} \sigma^2 \cdot k/h^2 < 1 \\ \gamma - \sigma^2/2 < \sigma^2/h \end{cases} \tag{137}$$

[207]Hull, J., e A. White, "Valuing derivative securities using the explicit finite difference method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 25, n°1, 1990, pp. 91-92.

Tal acontece, na medida em que a grandeza

$$\frac{\partial Y}{\partial F}\cdot\gamma\cdot F+\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial F^2}\cdot\sigma^2\cdot F^2=\frac{1}{F}\cdot\gamma\cdot F+0+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{F^2}\right)\cdot\sigma^2\cdot F^2=\gamma-\sigma^2\!/\!_2$$

é limitada.

Em síntese, o método numérico das diferenças finitas a utilizar na prática deverá ser a versão explícita da sua transformação logarítmica, por três ordens de razões:

i) Em primeiro lugar, é preferível utilizar uma transformação logarítmica, pois desta forma obtêm-se coeficientes constantes;

ii) Em segundo lugar, o recurso à versão explícita torna desnecessária a resolução simultânea de sistemas de equações, ao contrário do que sucede caso se opte por uma "aproximação implícita"; e

iii) Por último, a estabilidade e convergência da solução numérica podem ser garantidas através da observância da condição (137).

3.2.2.3.4. Técnica da variante de controle

Tal como no método de Monte Carlo e no modelo binomial, a técnica da variante de controle também pode ser utilizada para melhorar a precisão da estimativa fornecida pela aplicação do método das diferenças finitas:

$$\boxed{\hat{V}_t^c(A)=\hat{V}_t(A)-\hat{V}_t(B)+V_t(B)} \qquad (138)$$

sendo,

A ≡ opção sob avaliação;

B ≡ opção similar à opção A, mas cujo valor hoje -$V_t(B)$- seja conhecido;

$\hat{V}_t^c(A)$ ≡ estimativa do valor da opção A obtida através da técnica da variante de controle;

$\hat{V}_t(A)$ ≡ estimativa do valor da opção A obtida através da aplicação do método das diferenças finitas;

$\hat{V}_t(B)$ ≡ estimativa do valor da opção B obtida através da aplicação do método das diferenças finitas; e

$V_t(B)$ ≡ valor conhecido para a opção B no momento "t" (preço de mercado ou solução fornecida por uma fórmula de avaliação analítica fechada).

3.2.2.4. Aproximação quadrática do valor de uma opção "americana" sobre futuros de obrigações

Barone-Adesi e Whaley[208] desenvolveram fórmulas analíticas "fechadas" de aproximação do valor calls e puts "americanas" sobre futuros, cujo modo de utilização prático será analisado seguidamente.

3.2.2.4.1. Opções de compra

O ponto de partida para a dedução da fórmula de Barone-Adesi e Whaley aplicável a opções de compra "americanas" sobre futuros de obrigações, consiste na constatação de que como a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial F^2}\cdot\sigma^2\cdot F^2+\frac{\partial V}{\partial t}-r\cdot V=0$$

é satisfeita quer por opções "americanas" sobre futuros quer ainda pelas suas congéneres "europeias", então ela também deverá ser verificada pelo prémio de exercício antecipado inerente à opção de tipo "americano".

No caso de uma call "americana" sobre futuros de obrigações, tal implica que

$$\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{FF}\cdot\sigma^2\cdot F^2+\varepsilon_t-r\cdot\varepsilon=0$$

sendo,

$\varepsilon=\varepsilon^c(F,X,T)$ ≡ prémio de exercício antecipado associado a uma call "americana" sobre futuros de obrigações (com um preço de exercício de "X" e maturidade "T"):

$$\varepsilon^c(F,X,T)=C(F,X,T)-c(F,X,T)$$

em que,

C(F,X,T) ≡ call "americana" sobre futuros; e
c(F,X,T) ≡ call "europeia" sobre futuros.

Como τ = T - t, então $\varepsilon_\tau=\varepsilon_t\cdot t_\tau=-\varepsilon_t$ e portanto

$$\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{FF}\cdot\sigma^2\cdot F^2+\varepsilon_t-r\cdot\varepsilon=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{FF}\cdot\sigma^2\cdot F^2-\varepsilon_\tau-r\cdot\varepsilon=0$$

[208] Barone-Adesi, G., e R. E. Whaley, "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *The Journal of Finance*, vol. XLII, nº 2, 1987, pp. 301- 20.

Definindo $\varepsilon^c(F,X,T)$ por

$$\varepsilon^c(F,K) = K(\tau)\cdot f(F,K)$$

as derivadas parciais de ε passam a ser dadas por:

i) $\varepsilon_F = K\cdot f_F$;

ii) $\varepsilon_{FF} = K\cdot f_{FF}$; e

iii) $\varepsilon_\tau = K_\tau\cdot f + K\cdot f_K\cdot K_\tau$,

pelo que

$$\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{FF}\cdot\sigma^2\cdot F^2 - \varepsilon_\tau - r\cdot\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot K\cdot f_{FF}\cdot\sigma^2\cdot F^2 - K_\tau\cdot f - K\cdot f_K\cdot K_\tau - r\cdot K\cdot f = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F^2\cdot f_{FF} - \frac{2\cdot r\cdot f}{\sigma^2}\cdot\left[1+\frac{K_\tau}{r}\cdot\left(\frac{1}{K}+\frac{f_K}{f}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo $K(\tau) = 1-e^{-r\cdot\tau}$, então $K_\tau = r\cdot e^{-r\cdot\tau}$ e portanto a equação anterior passa a ser dada por:

$$\Leftrightarrow F^2\cdot f_{FF} - \frac{2\cdot r\cdot f}{\sigma^2}\cdot\left[1+\frac{r\cdot e^{-r\cdot\tau}}{r}\cdot\left(\frac{1}{1-e^{-r\cdot\tau}}+\frac{f_K}{f}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F^2\cdot f_{FF} - \frac{2\cdot r\cdot f}{\sigma^2\cdot K} - \frac{2\cdot r\cdot f_K}{\sigma^2}\cdot(1-K) = 0$$

A aproximação proposta por Barone-Adesi e Whaley consiste precisamente em assumir que o termo "$\frac{2\cdot r\cdot f_K}{\sigma^2}\cdot(1-K)$" da equação diferencial anterior é aproximadamente igual a zero. Com efeito, tal aproximação afigura-se razoável por duas ordens de razões:

i) por um lado, à medida que τ tende para +∞, K converge para a unidade[209], (1-K) tende para zero e consequentemente $\frac{2\cdot r\cdot f_K}{\sigma^2}\cdot(1-K)$ também tende para zero; e

ii) por outro lado, à medida que τ tende para zero, f_K tende para zero e portanto $\frac{2\cdot r\cdot f_K}{\sigma^2}\cdot(1-K)$ também converge para zero.

---

[209] Pois, $\lim_{\tau\to+\infty} e^{-r\cdot\tau} = 0$.

Admitindo tal pressuposto, então a equação diferencial anterior pode ser aproximada por

$$F^2 \cdot f_{FF} - \frac{2 \cdot r}{\sigma^2 \cdot K} \cdot f = 0$$

Mas, a expressão anterior não é mais do que uma equação diferencial de segunda ordem com duas soluções lineares independentes do tipo $f = a \cdot F^q$, as quais podem ser determinadas mediante a realização das seguintes substituições:

i) $f = a \cdot F^q$; e

ii) $f_{FF} = \left(a \cdot q \cdot F^{q-1}\right)'_F = a \cdot q \cdot (q-1) \cdot F^{q-2}$.

Assim, obtém-se

$$F^2 \cdot a \cdot q \cdot (q-1) \cdot F^{q-2} - \frac{2 \cdot r}{\sigma^2 \cdot K} \cdot a \cdot F^q = 0 \Leftrightarrow a \cdot F^q \cdot \left(q^2 - q - \frac{2 \cdot r}{\sigma^2 \cdot K}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{1 - \sqrt{1 + {8r}/{\sigma^2 K}}}{2} \equiv q_1 \vee q = \frac{1 + \sqrt{1 + {8r}/{\sigma^2 K}}}{2} \equiv q_2$$

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial $F^2 \cdot f_{FF} - \frac{2 \cdot r}{\sigma^2 \cdot K} \cdot f = 0$ é dada por

$$f(F) = a_1 \cdot F^{q_1} + a_2 \cdot F^{q_2}$$

Todavia, no caso de uma opção de compra "americana" sobre futuros é necessário considerar a seguinte restrição:

$$a_1 = 0$$

Isto porque, como $q_1 < 0$[210], então caso $a_1 \neq 0$ viria $\lim_{F \to 0} f(F) = +\infty$, quando na verdade ε^c deveria tender para zero.

Deste modo,

$$f(F) = a_2 \cdot F^{q_2}$$

$$\Downarrow \quad \varepsilon^c(F,K) = K(\tau) \cdot f(F,K)$$

[210] Visto que ${8r}/{\sigma^2 K} > 0$.

$$\varepsilon^c = K \cdot a_2 \cdot F^{q_2}$$

$$\Downarrow \quad \varepsilon^c(F,X,T) = C(F,X,T) - c(F,X,T)$$

$$C(F,X,T) = c(F,X,T) + K \cdot a_2 \cdot F^{q_2}$$

Ora, esta última equação constitui precisamente uma aproximação do valor de uma opção de compra "americana" sobre futuros.

Designando por "F*" a abcissa do ponto no qual a curva C(F,X,T) tangencia a recta representativa do *valor intrínseco* da call "americana" (isto é, a abcissa do ponto a partir do qual o valor de mercado da opção coincide com o seu *valor intrínseco*) -ver

Gráfico XXIII

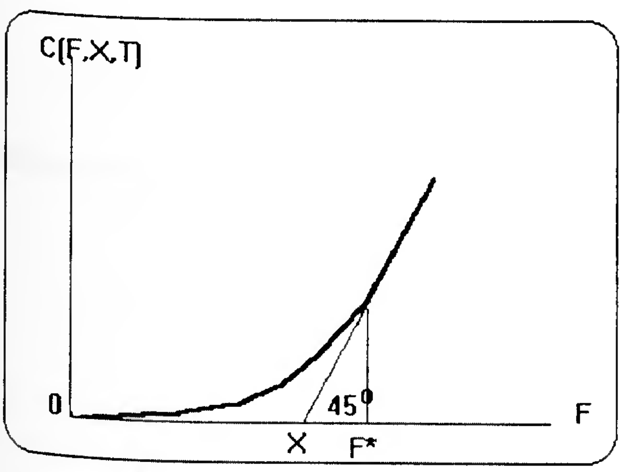


gráfico XXIII- então, a equação

$$C(F,X,T) = c(F,X,T) + K \cdot a_2 \cdot F^{q_2}$$

pode ser rescrita sob a forma:

$$C(F,X,T) = \begin{cases} c(F,X,T) + K \cdot a_2 \cdot F^{q_2} & \Leftarrow F < F^* \\ F - X & \Leftarrow F \geq F^* \end{cases}$$

Por outro lado, no ponto F = F* dever-se-ão verificar as duas seguintes condições:

i) em primeiro lugar, a inclinação da recta representativa do *valor intrínseco* da opção deverá ser igual ao declive da curva C(F,X,T) nesse mesmo ponto, ou seja,

$$\left[\frac{\partial(F-X)}{\partial F}\right]_{F=F^*} = \left\{\frac{\partial\left[c(F,X,T) + K \cdot a_2 \cdot F^{q_2}\right]}{\partial F}\right\}_{F=F^*}$$

$$\Updownarrow$$

$$1=\left\{\frac{\partial\left[F\cdot N(h)-X\cdot N\left(h-\sigma\cdot\sqrt{\tau}\right)\right]\cdot e^{-r\cdot\tau}}{\partial F}\right\}_{F=F^*}+K\cdot a_2\cdot q_2\cdot(F^*)^{q_2-1}$$

$$\text{com } h=\frac{\ln(F/X)+\sigma^2\cdot\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

$$\Updownarrow$$

$$1=e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[h(F^*)\right]+K\cdot a_2\cdot q_2\cdot(F^*)^{q_2-1}\qquad\text{com } h(F^*)=\frac{\ln(F^*/X)+\sigma^2\cdot\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_2=\frac{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[h(F^*)\right]}{K\cdot q_2\cdot(F^*)^{q_2-1}}$$

Substituindo o parâmetro "a_2" pela expressão anterior na equação

$$C(F,X,T)=\begin{cases}c(F,X,T)+K\cdot a_2\cdot F^{q_2} & \Leftarrow F<F^*\\ F-X & \Leftarrow F\geq F^*\end{cases}, \text{ vem}$$

$$\Downarrow$$

$$C(F,X,T)=\begin{cases}c(F,X,T)+A_2\cdot\left(F/F^*\right)^{q_2} & \Leftarrow F<F^*\\ F-X & \Leftarrow F\geq F^*\end{cases}$$

$$\text{sendo, } A_2=\frac{F^*}{q_2}\cdot\left\{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[h(F^*)\right]\right\}$$

ii) em segundo lugar, o *valor intrínseco* da opção de compra deverá ser idêntico ao seu valor de mercado, isto é,

$$F^*-X=c(F^*,X,T)+K\cdot a_2\cdot(F^*)^{q_2}$$

o que, tendo em conta a igualdade $a_2=\dfrac{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[h(F^*)\right]}{K\cdot q_2\cdot(F^*)^{q_2-1}}$, significa que

$$F^*-X=c(F^*,X,T)+\frac{F^*}{q_2}\cdot\left\{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[h(F^*)\right]\right\}\qquad(139)$$

Em síntese, a aproximação quadrática do valor de uma opção de compra "americana" sobre futuros de obrigações, proposta por Barone-Adesi e Whaley, é a seguinte:

APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA: OPÇÕES DE COMPRA "AMERICANAS" SOBRE FUTUROS DE OBRIGAÇÕES

$$C(F,X,T)=\begin{cases} c(F,X,T)+A_2\cdot\left(F/F^*\right)^{q_2} & \Leftarrow F<F^* \\ F-X & \Leftarrow F\geq F^* \end{cases} \tag{140}$$

sendo,

$$c(F,X,T)=e^{-r\tau}\cdot\left[F\cdot N(h)-X\cdot N\left(h-\sigma\cdot\sqrt{\tau}\right)\right]$$

$$h=\frac{\ln(F/X)+\sigma^2\cdot\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

$$A_2=\frac{F^*}{q_2}\cdot\left\{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[h(F^*)\right]\right\}$$

$$h(F^*)=\frac{\ln(F^*/X)+\sigma^2\cdot\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

$$q_2=\frac{1+\sqrt{1+8r/\sigma^2K}}{2}$$

$$K=1-e^{-r\cdot\tau}$$

e em que, F* é obtido mediante a resolução iterativa da seguinte equação:

$$F^*-X=c(F^*,X,T)+\frac{F^*}{q_2}\cdot\left\{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[h(F^*)\right]\right\}$$

O primeiro, e mais complexo, **passo a executar para aplicar a metodologia sugerida por Barone-Adesi e Whaley consiste em determinar o valor de "F*"**

mediante a resolução da equação $F^* - X = c(F^*, X, T) + \frac{F^*}{q_2} \cdot \{1 - e^{-r\cdot\tau} \cdot N[h(F^*)]\}$.[211]

Para o efeito, estes dois autores propõem um algoritmo simples e eficiente.

Com vista à exposição desse mesmo algoritmo, designe-se por

$$LHS(F_i) = F_i - X$$

o valor do lado esquerdo da equação anterior para F = F_i

e seja

$$RHS(F_i) = c(F_i, X, T) + \frac{F_i}{q_2} \cdot \{1 - e^{-r\tau} \cdot N[h(F_i)]\}$$

o valor correspondente ao lado direito dessa mesma equação, em que

$$h(F_i) = \frac{\ln(F_i \; X) + \sigma^2 \cdot \tau_2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}.$$

Deste modo, o declive de $RHS(F_i)$ no ponto F = F_i, designado por b_i, é dado por

$$b_i = e^{-r\tau} \cdot N[h(F_i)] \cdot \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) + \left\{1 - \frac{e^{-r\tau} \cdot n[h(F_i)]}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}\right\} \cdot \frac{1}{q_2}$$

sendo,

n(.) ≡ função densidade da distribuição normal.

Por outro lado, a equação da recta tangente à curva $RHS(F_i)$ no ponto F_i e que intersecta a linha do *valor intrínseco* da call "americana" sobre futuros é a seguinte:

$$RHS(F_i) + b_i \cdot (F - F_i) = F - X.$$

Assim sendo, o algoritmo de resolução da equação (139) envolve:

1°) Inicialização do processo, ou seja, determinação de

$$LHS(F_1) = F_1 - X$$

e

$$RHS(F_1) = c(F_1, X, T) + \frac{F_1}{q_2} \cdot \{1 - e^{-r\tau} \cdot N[h(F_1)]\},$$

sendo que, como regra prática, os autores sugerem que $F_1 = X$.

[211] Posto isso, a aplicação das fórmulas (140) é directa.

2º) Caso $LHS(F_1) \neq RHS(F_1)$ então repete-se o cálculo de LHS e de RHS, com uma nova cotação do futuro (F_2). Tal cotação deverá ser tal que

$$RHS(F_1) + b_1 \cdot (F_2 - F_1) = F_2 - X$$

$$\Updownarrow$$

$$F_2 = \left[X + RHS(F_1) - b_1 \cdot F_1\right] / (1 - b_1)$$

Este processo repete-se iterativamente até que $LHS(F^*) = RHS(F^*)$.

Generalizando a análise, **a primeira etapa na determinação do valor de uma opção de compra "americana" sobre futuros de obrigações através da aproximação quadrática de Barone-Adesi e Whaley, consiste em calcular**

$$\boldsymbol{LHS(F_i) = F_i - X} \tag{141}$$

e

$$RHS(F_i) = c(F_i, X, T) + \frac{F_i}{q_2} \cdot \left\{1 - e^{-r\tau} \cdot N\left[h(F_i)\right]\right\} \tag{142}$$

com, $h(F_i) = \dfrac{\ln(F_i / X) + \sigma^2 \cdot \tau / 2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}$

sendo,

$$\boldsymbol{F_1 = X}$$

e

$$\boldsymbol{F_i = \frac{X + RHS(F_{i-1}) - b_{i-1} \cdot F_{i-1}}{1 - b_{i-1}}} \quad \text{se i > 1} \tag{143}$$

em que,

$$b_{i-1} = e^{-r\tau} \cdot N\left[h(F_{i-1})\right] \cdot \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) + \left\{1 - \frac{e^{-r\tau} \cdot n\left[h(F_{i-1})\right]}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}\right\} \cdot \frac{1}{q_2} \tag{144}$$

e até que $\boxed{\boldsymbol{LHS(F_i) = RHS(F_i)}}$.

Em alternativa à aplicação do algoritmo anterior, poder-se-à obter o valor de F* através da seguinte aproximação analítica[212]:

$$F^* \cong X + \left[F^*(\infty) - X\right]\cdot\left(1 - e^{h_2}\right) \tag{145}$$

sendo,

$$F^*(\infty) = X \cdot \left[1 - \frac{1}{q_2(\infty)}\right]^{-1} \tag{146}$$

$$q_2(\infty) = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8r}{\sigma^2}}}{2} \tag{147}$$

$$h_2 = \frac{-2\sigma\sqrt{\tau}\cdot X}{F^*(\infty) - X} \tag{148}$$

Uma terceira, e mais eficiente, alternativa de determinação do valor de F* consiste em utilizar o algoritmo expresso pelas equações (141) a (144), mas considerando

$$F_1 = X + \left[F^*(\infty) - X\right]\cdot\left(1 - e^{h_2}\right).$$

De acordo com os autores, tal procedimento assegura a convergência do processo para a solução (F*) em não mais de três iterações.

3.2.2.4.2. Opções de venda

Como a equação diferencial $\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial F^2}\cdot\sigma^2\cdot F^2 + \frac{\partial V}{\partial t} - r\cdot V = 0$ também é aplicável a ε^p, sendo

$\varepsilon^p(F, X, T)$ ≡ prémio de exercício antecipado associado a uma put "americana" sobre futuros de obrigações (com um preço de exercício de "X" e maturidade "T"):

[212] Vide Barone-Adesi, G., e R. E. Whaley, "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *The Journal of Finance*, vol. XLII, nº 2, 1987, pp. 318-19.

$$\varepsilon^{p}(F,X,T)=P(F,X,T)-p(F,X,T)$$

em que,

P(F,X,T) ≡ put "americana" sobre futuros; e

p(F,X,T) ≡ put "europeia" sobre futuros,

então a equação diferencial $\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{FF}\cdot\sigma^{2}\cdot F^{2}+\varepsilon_{t}-r\cdot\varepsilon=0$, com $\varepsilon=\varepsilon^{p}$, pode ser aproximada através da equação $F^{2}\cdot f_{FF}-\frac{2\cdot r}{\sigma^{2}\cdot K}\cdot f=0$, cuja solução geral continua a ser dada por

$$f(F)=a_{1}\cdot F^{q_{1}}+a_{2}\cdot F^{q_{2}},$$

com $q_{1}=\frac{1-\sqrt{1+\frac{8r}{\sigma^{2}K}}}{2}$ e $q_{2}=\frac{1+\sqrt{1+\frac{8r}{\sigma^{2}K}}}{2}$

Contudo, tratando-se de uma opção de venda "americana" sobre futuros é necessário considerar que

$$a_{2}=0.$$

Isto porque, como $q_{2}>0$ então, caso $a_{2}\neq 0$ viria $\lim_{F\to+\infty}f(F)=+\infty$, quando de facto $\varepsilon^{p}=K\cdot f$ deveria tender para zero.

Consequentemente,

$$f(F)=a_{1}\cdot F^{q_{1}}$$

$$\Downarrow \quad \varepsilon^{p}(F,K)=K(\tau)\cdot f(F,K)$$

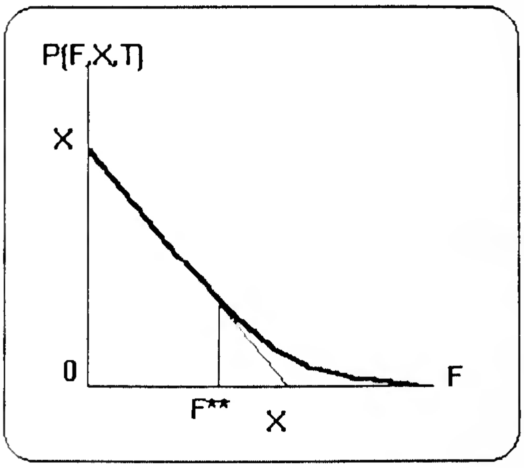
$$\varepsilon^{p}=K\cdot a_{1}\cdot F^{q_{1}}$$

$$\Downarrow \quad \varepsilon^{p}(F,X,T)=P(F,X,T)-p(F,X,T)$$

$$P(F,X,T)=p(F,X,T)+K\cdot a_{1}\cdot F^{q_{1}}$$

constituindo esta última equação uma aproximação do valor de uma opção de venda "americana" sobre futuros.

Denominando por F** a abcissa do ponto a partir do qual o valor de mercado da put - P(F,X,T)- coincide com o seu *valor intrínseco* (ver gráfico XXIV), Gráfico XXIV



então a última equação apresentada pode ser enunciada do seguinte modo:

$$P(F,X,T)=\begin{cases} p(F,X,T)+K\cdot a_1\cdot F^{q_1} & \Leftarrow F>F^{**} \\ X-F & \Leftarrow F\leq F^{**} \end{cases}$$

Mas, mais uma vez, no ponto F = F** ter-se-ão de verificar duas condições, a saber:

i) por um lado, a inclinação da recta representativa do *valor intrínseco* da opção deverá ser igual ao declive da curva P(F,X,T) nesse mesmo ponto, ou seja,

$$\left[\frac{\partial(X-F)}{\partial F}\right]_{F=F^{**}}=\left\{\frac{\partial\left[p(F,X,T)+K\cdot a_1\cdot F^{q_1}\right]}{\partial F}\right\}_{F=F^{**}}$$

$$\Updownarrow$$

$$-1=\left\{\frac{\partial\left[-F\cdot N(-h)+X\cdot N\left(\sigma\cdot\sqrt{\tau}-h\right)\right]\cdot e^{-r\cdot\tau}}{\partial F}\right\}_{F=F^{**}}+K\cdot a_1\cdot q_1\cdot(F^{**})^{q_1-1}$$

$$\text{com } h=\frac{\ln(F/X)+\sigma^2\cdot\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

$$\Updownarrow$$

$$-1=-e^{-r\tau}\cdot N\left[-h(F^{**})\right]+K\cdot a_1\cdot q_1\cdot(F^{**})^{q_1-1}\quad \text{com } h(F^{**})=\frac{\ln(F^{**}/X)+\sigma^2\cdot\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 = -\frac{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[-h(F^{**})\right]}{K\cdot q_1\cdot(F^{**})^{q_1-1}}$$

Substituindo o parâmetro "a_1" pela expressão anterior na equação

$$P(F,X,T)=\begin{cases} p(F,X,T)+K\cdot a_1\cdot F^{q_1} & \Leftarrow F>F^{**} \\ X-F & \Leftarrow F\leq F^{**}\end{cases},\ \text{vem}$$

$$\Downarrow$$

$$P(F,X,T)=\begin{cases} p(F,X,T)+A_1\cdot\left(F/F^{**}\right)^{q_1} & \Leftarrow F>F^{**} \\ X-F & \Leftarrow F\leq F^{**}\end{cases}$$

sendo, $A_1 = -\dfrac{F^{**}}{q_1}\cdot\left\{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[-h(F^{**})\right]\right\}$

ii) em segundo lugar, no ponto F = F** o *valor intrínseco* da put "americana" deverá ser igual ao seu valor de mercado, ou seja,

$$X-F^{**}=p(F^{**},X,T)+K\cdot a_1\cdot(F^{**})^{q_1}$$

o que, tendo em conta a igualdade $a_1 = -\dfrac{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[-h(F^{**})\right]}{K\cdot q_1\cdot(F^{**})^{q_1-1}}$, significa que

$$X-F^{**}=p(F^{**},X,T)-\frac{F^{**}}{q_1}\cdot\left\{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[-h(F^{**})\right]\right\} \qquad (149)$$

Em síntese, a aproximação quadrática do valor de uma opção de venda "americana" sobre futuros de obrigações, proposta por Barone-Adesi e Whaley, é a seguinte:

APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA: OPÇÕES DE VENDA "AMERICANAS" SOBRE FUTUROS DE OBRIGAÇÕES

$$P(F,X,T)=\begin{cases} p(F,X,T)+A_1\cdot\left(F/F^{**}\right)^{q_1} & \Leftarrow F>F^{**} \\ X-F & \Leftarrow F\leq F^{**}\end{cases} \qquad (150)$$

sendo,

$$p(F,X,T)=e^{-r\tau}\cdot\left[-F\cdot N(-h)+X\cdot N\left(\sigma\sqrt{\tau}-h\right)\right]$$

$$h=\frac{\ln(F/X)+\sigma^2\cdot\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

$$A_1=-\frac{F^{**}}{q_1}\cdot\left\{1-e^{-r\cdot\tau}\cdot N\left[-h(F^{**})\right]\right\}$$

$$h(F^{**})=\frac{\ln(F^{**}/X)+\sigma^2\cdot\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

$$q_1=\frac{1-\sqrt{1+8r/\sigma^2K}}{2}$$

$$K=1-e^{-r\cdot\tau}$$

e em que, F** é obtido mediante a resolução iterativa da seguinte equação:

$$X-F^{**}=p(F^{**},X,T)-\frac{F^{**}}{q_1}\cdot\left\{1-e^{-r\tau}\cdot N\left[-h(F^{**})\right]\right\}$$

Tal como anteriormente, o processo de cálculo do valor de uma put "americana" sobre futuros através das fórmulas (150) começa com a determinação do valor de F**, através de uma das três alternativas de solução sugeridas por Barone-Adesi e Whaley:

i) Uma alternativa passa pela aplicação do algoritmo de resolução iterativa da equação (149) sugerido por estes dois autores, sendo a inicialização feita com base no preço de exercício da opção. Ou seja, esta hipótese consiste em

calcular

$$LHS(F_i) = X - F_i \tag{151}$$

e

$$RHS(F_i) = p(F_i, X, T) - \frac{F_i}{q_1} \cdot \left\{1 - e^{-r\tau} \cdot N\left[-h(F_i)\right]\right\} \tag{152}$$

com, $h(F_i) = \dfrac{\ln(F_i / X) + \sigma^2 \cdot \tau / 2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}$

sendo,

$$F_1 = X$$

e

$$F_i = \frac{X - RHS(F_{i-1}) + b_{i-1} \cdot F_{i-1}}{1 + b_{i-1}} \quad \text{se } i > 1 \tag{153}$$

em que,

$$b_{i-1} = -e^{-r\tau} \cdot N\left[-h(F_{i-1})\right] \cdot \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) - \left\{1 + \frac{e^{-r\tau} \cdot n\left[-h(F_{i-1})\right]}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}\right\} \cdot \frac{1}{q_1} \tag{154}$$

e até que $\boxed{LHS(F_i) = RHS(F_i)}$.

ii) Uma segunda hipótese consiste em obter directamente o valor de F** através da seguinte aproximação analítica:

$$F^{**} \cong F^{**}(\infty) + \left[X - F^{**}(\infty)\right] \cdot e^{h_1} \tag{155}$$

sendo,

$$F^{**}(\infty) = X \cdot \left[1 - \frac{1}{q_1(\infty)}\right]^{-1} \tag{156}$$

$$q_1(\infty) = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{8r}{\sigma^2}}}{2} \tag{157}$$

$$h_1 = \frac{-2\sigma\sqrt{\tau} \cdot X}{X - F^{**}(\infty)} \tag{158}$$

iii) Finalmente, uma última e mais exacta alternativa de determinação do valor de F** consiste em **utilizar o algoritmo descrito no ponto (i) anterior, só que inicializando o processo não com o preço de exercício da opção mas sim com a aproximação analítica anterior, isto é, fazendo**

$$F_1 = F^{**}(\infty) + \left[X - F^{**}(\infty)\right] \cdot e^{h_1}.$$

3.2.2.5. Aproximação polinomial do valor de uma opção "americana" sobre futuros

Whaley[213] aplicou às opções "americanas" sobre futuros a metodologia desenvolvida por Geske e Johnson[214] para a avaliação de opções de venda "americanas" sobre acções (sem dividendos durante a vigência da opção), conseguindo aproximar o valor das opções em análise através de uma fórmula analítica. Ora, é precisamente a dedução e explicitação desta última expressão (para opções de compra e de venda) que irá preencher as páginas seguintes.

Considerando que "$V_t^i(F, X, T)$" representa, no momento "t", o valor de uma opção sobre futuros (de compra ou de venda), com um preço de exercício de "X", cujo tempo em falta para o vencimento é de "τ = T - t" períodos de tempo e que pode ser exercida nos períodos $t+1\cdot\frac{\tau}{i}$, $t+2\cdot\frac{\tau}{i}$, ... e $t+i\cdot\frac{\tau}{i}=T$, então o raciocínio seguido por Geske-Johnson consistiu em constatar que o valor de uma opção "americana" é dado por "$\lim_{i\to+\infty} V_t^i(F, X, T) \equiv V_t$"[215] e que pode ser eficientemente aproximado com base no seguinte polinómio:[216]

$$\boxed{V_t \cong V_t^3 + \tfrac{7}{2}\cdot\left(V_t^3 - V_t^2\right) - \tfrac{1}{2}\cdot\left(V_t^2 - V_t^1\right) = 0{,}5\cdot V_t^1 - 4\cdot V_t^2 + 4{,}5\cdot V_t^3}$$

sendo,

V_t ≡ valor, no momento "t" (data de avaliação), de uma opção "americana" sobre futuros com um preço de exercício de "X" e vencimento no período "T";

V_t^1 ≡ valor, no momento "t", de uma opção sobre futuros, com idênticos preço de exercício e data de vencimento, mas cujo exercício apenas poderá ocorrer no período "T", isto é, trata-se do valor de uma opção "europeia" sobre futuros;

---

[213] Whaley, Robert E., "On Valuing American Futures Options", *Financial Analysts Journal*, Maio-Junho de 1986, pp. 49-59.

[214] Geske, Robert, e H. E. Johnson, "The American Put Valued Analytically", *The Journal of Finance*, vol. XXXIX, nº. 5, Dezembro de 1984, pp. 1511-24.

[215] Isto é, que uma opção "americana" pode ser exercida a qualquer momento (durante a sua vigência), ou seja, que no caso de uma opção de tipo "americano" existe um número infinito de hipóteses de exercício antecipado.

[216] Vide a demonstração apresentada no artigo de R. Geske e H. Johnson (1984), pp. 1523. No fundo, trata-se da extrapolação do valor de "V_t" com base no conhecimento dos valores de "V_t^1", "V_t^2" e "V_t^3".

$V_t^{2} \equiv$ valor, no momento "t", de uma opção sobre futuros, com idênticos preço de exercício e data de vencimento, mas cujo exercício apenas poderá ocorrer nos períodos $t+\frac{\tau}{2}$ e T; e

$V_t^{3} \equiv$ valor, no momento "t", de uma opção sobre futuros, com idênticos preço de exercício e data de vencimento, mas cujo exercício apenas poderá ocorrer nos períodos $t+\frac{\tau}{3}$, $t+\frac{2\tau}{3}$ e T.

3.2.2.5.1. Opções de compra "americanas" sobre futuros

Transpondo a aproximação de Geske-Johnson para o âmbito das opções de compra "americanas" sobre futuros, vem

$$\boxed{C_t(F,X,T) \cong 0{,}5 \cdot C_t^1 - 4 \cdot C_t^2 + 4{,}5 \cdot C_t^3}$$

em que, $C_t(F,X,T)$ representa o valor, no momento "t", de uma opção de compra "americana" sobre futuros, com um preço de exercício de "X" e vencimento no momento "T". Portanto, para aproximar o valor de tal call basta calcular o valor de C_t^1, C_t^2 e C_t^3.

No que concerne à parcela $C_t^1 \equiv C_t^1(F,X,T)$, esta traduz o valor, no momento "t", de uma opção de compra sobre futuros, com um preço de exercício de "X" e maturidade no período "T", mas que somente poderá ser exercida na sua data de vencimento e portanto corresponde ao valor de uma opção de compra "europeia" sobre futuros:[217]

$$\boxed{C_t^1(F,X,T) = e^{-r\tau} \cdot \left[F_t \cdot N_1(h_\tau) - X \cdot N_1\left(h_\tau - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right]}$$ [218]

com,

$$\boxed{h_\tau = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{X}\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}}$$

[217] Fórmula (72). Ao longo deste quesito do trabalho ir-se-ão adoptar os pressupostos inerentes ao modelo de Black-Scholes.

[218] Utiliza-se a designação $N_1(\cdot)$ dado estar em causa uma distribuição normal unidimensional e pelo facto de mais adiante ser necessário recorrer a distribuições normais bidimensional e tridimensional.

Por seu turno, $C_t^2 \equiv C_t^2(F,X,T)$ representa o valor, no momento "t", de uma opção de compra sobre futuros, com um preço de exercício de "X" e vencimento no período "T", mas que apenas pode ser exercida nos momentos $t+\frac{\tau}{2}$ e T. A determinação da fórmula de cálculo do seu valor irá ser feita "a la Roll", ou seja, mediante a construção de uma carteira de activos cujo perfil de cash flows futuros seja idêntico ao associado à opção em análise e cujo valor dos activos componentes seja conhecido[219]. Isto porque, caso tal aconteça, então a inexistência de oportunidades de arbitragem num mercado financeiro perfeito requer que, no momento actual, o valor da carteira seja idêntico ao valor da opção em análise.

O perfil de fluxos financeiros futuros proporcionado pela opção em análise é dado por:

- no momento "$t+\frac{\tau}{2}$"

$$C^2_{t+\frac{\tau}{2}}(F,X,T)=\begin{cases} c_{t+\frac{\tau}{2}}(F,X,T) & \text{se } F_{t+\frac{\tau}{2}} \leq F^*_{\frac{\tau}{2}} \\ F_{t+\frac{\tau}{2}} - X & \text{se } F_{t+\frac{\tau}{2}} > F^*_{\frac{\tau}{2}} \end{cases}$$

sendo,

$$F^*_{\frac{\tau}{2}}:\ F^*_{\frac{\tau}{2}} - X = c_{t+\frac{\tau}{2}}\left(F^*_{\frac{\tau}{2}},X,T\right)$$

De facto, se no momento "$t+\frac{\tau}{2}$" a opção for exercida então, obter-se-á o seu valor intrínseco ($F_{t+\frac{\tau}{2}} - X$), e caso contrário, passar-se-á a dispor de uma opção

[219]Trata-se de uma metodologia semelhante à utilizada por Roll para determinar o valor de uma opção de compra "americana" sobre uma acção que gere somente um dividendo certo e de montante conhecido até ao final da vigência do contrato (pois, neste caso prova-se que o exercício antecipado da opção apenas consubstancia uma estratégia racional na data de ocorrência de tal dividendo, ou seja, existem somente duas datas de exercício para a opção). Tal método de avaliação encontra-se descrito e discutido nos seguintes artigos: Roll, R., "An Analytic Valuation Formula For Unprotected American Call Options On Stocks With Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp. 251-8; Geske, R., "A Note On An Analytical Valuation Formula For Unprotected American Call Options On Stocks With Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 7, 1979, pp. 375-80; Whaley, R., "On The Valuation Of American Call Options On Stocks With Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 9, 1981, pp. 207-11; e Geske, R., "Comments On Whaley's Note", *Journal of Financial Economics*, 9, 1981, pp. 213-5.

"europeia" ($c_{t+\frac{\tau}{2}}(F,X,T)$) visto apenas poder ser exercida na maturidade. Por outro lado, "$F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$" representa a cotação do futuro no momento "$t+\frac{\tau}{2}$" acima da qual o *valor intrínseco* da opção é superior ao seu valor de mercado (dado pelo valor de uma opção "europeia", visto não existir qualquer outra oportunidade de exercício antecipado), ou seja, acima da qual haverá lugar ao exercício da opção nessa mesma data.

- momento "T"

$$C_T^2(F,X,T)=\begin{cases} F_T-X & \text{se } F_T>X \text{ e } F_{t+\frac{\tau}{2}}\leq F^{*}_{\frac{\tau}{2}} \\ 0 & \text{se } F_T\leq X \text{ e/ou } F_{t+\frac{\tau}{2}}>F^{*}_{\frac{\tau}{2}} \end{cases} = c_T(F,X,T)$$

A opção em análise apenas poderá gerar algum cash flow no período "T" desde que não tenha sido exercida no momento "$t+\frac{\tau}{2}$" e assim sendo tais fluxos financeiros identificam-se com o valor de uma call "europeia" na maturidade.

Deste modo e conforme é patenteado pelo quadro seguinte, o perfil de cash flows futuros da opção "$C_t^2 \equiv C_t^2(F,X,T)$" é idêntico ao gerado por uma carteira composta pela:

a) aquisição de uma opção de compra "europeia" com um preço de exercício de "X" e vencimento no momento "T";

b) compra de uma opção de compra "europeia" com um preço de exercício de "$F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$" e vencimento no período "$t+\frac{\tau}{2}$"; e

c) venda de uma opção de compra "europeia" sobre a opção da alínea "a", com um preço de exercício de "$F^{*}_{\frac{\tau}{2}}-X$" e vencimento no momento "$t+\frac{\tau}{2}$".

CARTEIRA	MOMENTO t	MOMENTO $t + \tau/2$		MOMENTO T	
		Se $F_{t+\frac{\tau}{2}} \leq F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$	*Se* $F_{t+\frac{\tau}{2}} > F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$	*Se* $F_T \leq X$ e/ou $F_{t+\frac{\tau}{2}} > F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$	*Se* $F_T > X$ e $F_{t+\frac{\tau}{2}} \leq F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$
a)	$-c_t(F, X, T)$	$+c_{t+\frac{\tau}{2}}(F, X, T)$	0	0	$F_T - X$
b)	$-c_t\left(F, F^{*}_{\frac{\tau}{2}}, t+\frac{\tau}{2}\right)$	0	$F_{t+\frac{\tau}{2}} - F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$	0	0
c)	$+c_t\left[c(F,X,T), F^{*}_{\frac{\tau}{2}} - X, t+\frac{\tau}{2}\right]$	0	$+\left(F^{*}_{\frac{\tau}{2}} - X\right)$	0	0
$\pi =$	$-c_t(F, X, T)$ $-c_t\left(F, F^{*}_{\frac{\tau}{2}}, t+\frac{\tau}{2}\right)$ $+c_t\left[c(F,X,T), F^{*}_{\frac{\tau}{2}} - X, t+\frac{\tau}{2}\right]$	$+c_{t+\frac{\tau}{2}}(F, X, T)$	$F_{t+\frac{\tau}{2}} - X$	0	$F_T - X$

De facto, no momento "$t + \frac{\tau}{2}$":

i) Se $F_{t+\frac{\tau}{2}} \leq F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$, a opção da alínea "b" não é exercida (pois, o seu *valor intrínseco* é nulo), o mesmo sucedendo com a opção da alínea "c" (visto que, $c_{t+\frac{\tau}{2}}(F, X, T) \leq F^{*}_{\frac{\tau}{2}} - X$ para

$F_{t+\frac{\tau}{2}} \leq F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$) e portanto o valor da carteira corresponderá integralmente ao preço da opção da alínea "a";

ii) Caso contrário ($F_{t+\frac{\tau}{2}} > F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$), a opção da alínea "b" será exercida (proporcionando o encaixe do seu *valor intrínseco*) bem como a opção da alínea "c" (de onde decorre o recebimento do seu preço de exercício e a entrega da opção "a").

No momento "T":

i) Se a opção "c" tiver sido exercida no período "$t+\frac{\tau}{2}$" (isto é, se $F_{t+\frac{\tau}{2}} > F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$) e/ou se a opção "a" estiver "out-of-the-money" no período "T" (ou seja, se $F_T \leq X$), então o valor da carteira será nulo (pois, a opção "a" não será exercida pelo facto de já não integrar a carteira ou por possuir um *valor intrínseco* igual a zero);

ii) Se a opção "c" não tiver sido exercida no período "$t+\frac{\tau}{2}$"[220] (isto é, se $F_{t+\frac{\tau}{2}} \leq F^{*}_{\frac{\tau}{2}}$) e se a opção "a" estiver "in-the-money" no período "T" (isto é, se $F_T > X$), logo esta última será exercida gerando o seu *valor intrínseco*.

Consequentemente, a inexistência de oportunidades de realização de ganhos sem risco impõe que, no momento "t", os valores da carteira e da opção em análise sejam coincidentes (tal como acontece para os restantes momentos):

$$-C_t^2(F,X,T) = -c_t(F,X,T) - c_t\left(F,F^{*}_{\frac{\tau}{2}},t+\frac{\tau}{2}\right) + c_t\left[c(F,X,T),F^{*}_{\frac{\tau}{2}} - X,t+\frac{\tau}{2}\right]$$ [221]

$$\Updownarrow$$

$$C_t^2(F,X,T) = c_t(F,X,T) + c_t\left(F,F^{*}_{\frac{\tau}{2}},t+\frac{\tau}{2}\right) - c_t\left[c(F,X,T),F^{*}_{\frac{\tau}{2}} - X,t+\frac{\tau}{2}\right]$$

[220] Ou seja, se a opção "a" ainda integrar a carteira no momento "T".
[221] Tal significa que a compra da opção em análise é equivalente à constituição da carteira descrita anteriormente.

As duas primeiras parcelas do segundo membro da expressão anterior podem ser facilmente determinadas, via recurso à fórmula (72). Assim:

$$c_t(F,X,T) = e^{-r\tau} \cdot \left[F_t \cdot N_1(h_\tau) - X \cdot N_1\left(h_\tau - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right]$$

$$\text{com,} \quad h_\tau = \frac{\ln\left(F_t / X\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}$$

e

$$c_t\left(F, F^*_{\frac{\tau}{2}}, t + \frac{\tau}{2}\right) = e^{-r\cdot\frac{\tau}{2}} \cdot \left[F_t \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}}\right) - F^*_{\frac{\tau}{2}} \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/2}\right)\right]$$

$$\text{com,} \quad h_{\frac{\tau}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{F^*_{\frac{\tau}{2}}}\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau/2}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau/2}}$$

Pelo contrário, a parcela "$c_t\left[c(F,X,T), F^*_{\frac{\tau}{2}} - X, t + \frac{\tau}{2}\right]$" consiste numa opção sobre outra opção[222], pelo que não poderá ser avaliada através da expressão (72). Todavia, Geske[223] deduziu uma fórmula analítica fechada para o valor de uma opção sobre outra opção cujo activo subjacente não liberte quaisquer fluxos financeiros durante a vigência de ambos os contratos, a saber:

$$c_t\left[c(S, X_2, T_2), X_1, T_1\right] = {}^{224}$$

$$= S_t \cdot N_2\left(h_{\tau_1}, h_{\tau_2}; \sqrt{\tau_1/\tau_2}\right) - X_2 \cdot e^{-r\tau_2} \cdot N_2\left(h_{\tau_1} - \sigma\cdot\sqrt{\tau_1}, h_{\tau_2} - \sigma\cdot\sqrt{\tau_2}; \sqrt{\tau_1/\tau_2}\right) - X_1 \cdot e^{-r\tau_1} \cdot N_1\left(h_{\tau_1} - \sigma\cdot\sqrt{\tau_1}\right)$$

---

222 As opções sobre opções são habitualmente designadas por "compound options".
223 Geske, R., "The Valuation Of Corporate Liabilities As Coumpond Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Novembro de 1977, pp. 541-52; e Geske, R., "The Valuation Of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, 7, 1979, pp. 63-81.
224 Fórmula de Geske para opções "on the spot".

sendo,

$t \equiv$ data de avaliação;

$T_1 \equiv$ data de vencimento da "coumpond option";

$T_2 \equiv$ data de vencimento da opção subjacente (com $T_2 > T_1$);

$\tau_1 = T_1 - t \equiv$ tempo em falta para o vencimento da "coumpond option";

$\tau_2 = T_2 - t \equiv$ tempo em falta para o vencimento da opção subjacente;

$X_1 \equiv$ preço de exercício da "coumpond option";

$X_2 \equiv$ preço de exercício da opção subjacente;

$S_t \equiv$ cotação, no momento "t", do activo financeiro[225] subjacente à "opção subjacente";

$N_1(a) \equiv$ função densidade acumulada da distribuição normal unidimensional, com um limite superior de integração igual a "a";

$N_2(a,b;\rho) \equiv$ função densidade acumulada da distribuição normal bidimensional, com limites superiores de integração "a" e "b" e com um coeficiente de correlação "ρ";

$$h_{\tau_2} = \frac{\ln\left(S_t / X_2\right) + \left(r + \sigma^2/2\right)\cdot\tau_2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau_2}} \text{ ; e}$$

$$h_{\tau_1} = \frac{\ln\left(S_t / S^*_{T_1}\right) + \left(r + \sigma^2/2\right)\cdot\tau_1}{\sigma\cdot\sqrt{\tau_1}} \qquad \text{com,} \quad S^*_{T_1}:\ X_1 = c_{T_1}\left(S^*_{T_1}, X_2, T_2\right).$$

Ora, assumindo que a taxa de juro é constante, então poder-se-ão efectuar as substituições "$S_t = F_t \cdot e^{-r\cdot\tau_2}$" e "$S^*_{T_1} = F^*_{T_1}\cdot e^{-r(T_2-T_1)}$" nas expressões anteriores, por forma a adaptar-se a fórmula de Geske ao caso das opções sobre futuros:

$$c_t\left[c(F, X_2, T_2), X_1, T_1\right] =^{226}$$

$$= e^{-r\cdot\tau_2}\cdot\left[F_t\cdot N_2\left(h_{\tau_1}, h_{\tau_2}; \sqrt{\tau_1/\tau_2}\right) - X_2\cdot N_2\left(h_{\tau_1} - \sigma\cdot\sqrt{\tau_1}, h_{\tau_2} - \sigma\cdot\sqrt{\tau_2}; \sqrt{\tau_1/\tau_2}\right)\right] - X_1\cdot e^{-r\cdot\tau_1}\cdot N_1\left(h_{\tau_1} - \sigma\cdot\sqrt{\tau_1}\right)$$

[225] Sendo que, por hipótese, tal activo não deverá gerar qualquer fluxo financeiro durante o intervalo de tempo "τ_2".

[226] Fórmula de Geske aplicável à avaliação de "coumpond options" cujo activo subjacente à "opção subjacente" seja um contrato futuro.

sendo,

t ≡ data de avaliação;

T_1 ≡ data de vencimento da "coumpond option";

T_2 ≡ data de vencimento da opção subjacente (com $T_2 > T_1$);

$\tau_1 = T_1 - t$ ≡ tempo em falta para o vencimento da "coumpond option";

$\tau_2 = T_2 - t$ ≡ tempo em falta para o vencimento da opção subjacente;

X_1 ≡ preço de exercício da "coumpond option";

X_2 ≡ preço de exercício da opção subjacente;

F_t ≡ cotação, no momento "t", do contrato futuro subjacente à "opção subjacente";

$$h_{\tau_2} = \frac{\ln\left(F_t / X_2\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau_2}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau_2}}; \text{ e}$$

$$h_{\tau_1} = \frac{\ln\left(F_t / F_{T_1}^*\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau_1}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau_1}} \qquad \text{com,} \quad F_{T_1}^*:\ X_1 = c_{T_1}\left(F_{T_1}^*, X_2, T_2\right).$$

Assim sendo, o valor da opção "$c_t\left[c(F,X,T), F_{\frac{\tau}{2}}^* - X, t + \frac{\tau}{2}\right]$" pode ser determinado através da fórmula anterior, atendendo a que $X_2 = X$, $T_2 = T$[227], $X_1 = F_{\frac{\tau}{2}}^* - X$ e $T_1 = t + \frac{\tau}{2}$[228]:

$$c_t\left[c(F,X,T), F_{\frac{\tau}{2}}^* - X, t + \frac{\tau}{2}\right] =$$

$$= e^{-r\tau} \cdot \left[F_t \cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}}, h_\tau; \sqrt{1/2}\right) - X \cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/2}, h_\tau - \sigma \cdot \sqrt{\tau}, \sqrt{1/2}\right)\right] - \left(F_{\frac{\tau}{2}}^* - X\right) \cdot e^{-r\frac{\tau}{2}} \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/2}\right)$$

---

[227] Ou seja, $\tau_2 = \tau$.

[228] E portanto, $\tau_1 = \tau/2$.

sendo,

$$h_{\tau} = \frac{\ln\left(F_t / X\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} \text{ ; e}$$

$$h_{\frac{\tau}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{F^*_{\frac{\tau}{2}}}\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau/2}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau/2}} \qquad \text{com, } F^*_{\frac{\tau}{2}}:\ F^*_{\frac{\tau}{2}} - X = c_{t+\frac{\tau}{2}}\left(F^*_{\frac{\tau}{2}}, X, T\right).$$

Consequentemente, é agora possível obter uma fórmula analítica fechada para $C_t^2(F, X, T)$, bastando para o efeito retomar a equação

$$C_t^2(F,X,T) = c_t(F,X,T) + c_t\left(F, F^*_{\frac{\tau}{2}}, t+\frac{\tau}{2}\right) - c_t\left[c(F,X,T), F^*_{\frac{\tau}{2}} - X, t+\frac{\tau}{2}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$C_t^2(F,X,T) =$$

$$= e^{-r\tau} \cdot \left[F_t \cdot N_1(h_{\tau}) - X \cdot N_1\left(h_{\tau} - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right] +$$

$$+ e^{-r\cdot\frac{\tau}{2}} \cdot \left[F_t \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}}\right) - F^*_{\frac{\tau}{2}} \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/2}\right)\right] -$$

$$-\left\{e^{-r\tau} \cdot \left[F_t \cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}}, h_{\tau}; \sqrt{1/2}\right) - X \cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/2}, h_{\tau} - \sigma \cdot \sqrt{\tau}, \sqrt{1/2}\right)\right] - \left(F^*_{\frac{\tau}{2}} - X\right) \cdot e^{-r\tau/2} \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/2}\right)\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$C_t^2(F,X,T) =$$

$$= e^{-r\cdot\frac{\tau}{2}} \cdot \left[F_t \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}}\right) - \left(F^*_{\frac{\tau}{2}} - F^*_{\frac{\tau}{2}} + X\right)\cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma\cdot\sqrt{\tau/2}\right)\right] +$$

$$+e^{-r\cdot\tau}\cdot\left\{F_t\cdot\left[N_1(h_\tau) - N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}}, h_\tau; \sqrt{1/2}\right)\right] - X\cdot\left[N_1\left(h_\tau - \sigma\cdot\sqrt{\tau}\right) - N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma\cdot\sqrt{\tau/2}, h_\tau - \sigma\cdot\sqrt{\tau}, \sqrt{1/2}\right)\right]\right\}$$

$\Updownarrow$[229]

$$\boxed{\begin{aligned} &C_t^2(F,X,T) = \\ &= e^{-r\cdot\frac{\tau}{2}} \cdot \left[F_t \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}}\right) - X\cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma\cdot\sqrt{\tau/2}\right)\right] + \\ &+e^{-r\cdot\tau}\cdot\left[F_t\cdot N_2\left(-h_{\frac{\tau}{2}}, h_\tau; -\sqrt{1/2}\right) - X\cdot N_2\left(\sigma\cdot\sqrt{\tau/2} - h_{\frac{\tau}{2}}, h_\tau - \sigma\cdot\sqrt{\tau}; -\sqrt{1/2}\right)\right]\end{aligned}}$$

sendo,

$$\boxed{h_\tau = \frac{\ln\left(F_t/X\right) + \dfrac{\sigma^2\cdot\tau}{2}}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}}\text{; e}$$

$$\boxed{h_{\frac{\tau}{2}} = \frac{\ln\left(\dfrac{F_t}{F^*_{\frac{\tau}{2}}}\right) + \dfrac{\sigma^2\cdot\tau/2}{2}}{\sigma\cdot\sqrt{\tau/2}}} \quad \text{com,} \quad F^*_{\frac{\tau}{2}}\text{:}\ \boxed{F^*_{\frac{\tau}{2}} - X = c_{t+\frac{\tau}{2}}\left(F^*_{\frac{\tau}{2}}, X, T\right)}.$$

Finalmente, $C_t^3 \equiv C_t^3(F,X,T)$ representa o valor, no momento "t", de uma opção de compra sobre futuros, com um preço de exercício de "X" e vencimento no período "T", mas que apenas pode ser exercida nos momentos $t+\frac{\tau}{3}$, $t+\frac{2\tau}{3}$ e T. Para determinar a expressão analítica do valor desta opção utiliza-se a metodologia empregue anteriormente, começando-se por notar que o seu perfil de cash flows futuros é idêntico ao patenteado por uma carteira constituída mediante:

[229] Pois, $N_1(b) - N_2(a,b;\rho) = N_2(-a,b;-\rho)$.

a) a aquisição de uma opção de compra sobre futuros, com um preço de exercício de "X", podendo ser exercida nos momentos $t+\frac{2\tau}{3}$ ou T;

b) a compra de uma opção de compra "europeia" sobre futuros, com um preço de exercício de "$F^{*}_{\frac{\tau}{3}}$" -sendo, $F^{*}_{\frac{\tau}{3}}$: $F^{*}_{\frac{\tau}{3}} - X = C^{2}_{t+\frac{\tau}{3}}\left(F^{*}_{\frac{\tau}{3}}, X, T\right)$- e com vencimento no momento $t+\frac{\tau}{3}$; e

c) a venda de uma opção de compra "europeia" sobre a opção referenciada na anterior alínea "a", com um preço de exercício de "$F^{*}_{\frac{\tau}{3}} - X$" e com vencimento no momento $t+\frac{\tau}{3}$.

Por outro lado, o conjunto de fluxos financeiros futuros gerados pela opção da anterior alínea "a" é fielmente copiado por uma carteira assente:

a1) na aquisição de uma opção de compra "europeia" sobre futuros, com um preço de exercício de "X" e com vencimento no momento "T";

a2) na aquisição de uma opção de compra "europeia" sobre futuros, com um preço de exercício de "$F^{*}_{\frac{2\tau}{3}}$" -sendo, $F^{*}_{\frac{2\tau}{3}}$: $F^{*}_{\frac{2\tau}{3}} - X = c_{t+\frac{2\tau}{3}}\left(F^{*}_{\frac{2\tau}{3}}, X, T\right)$- e com vencimento no momento $t+\frac{2\tau}{3}$; e

a3) na alienação de uma opção de compra "europeia" sobre a opção descrita na alínea "a1", com um preço de exercício de "$F^{*}_{\frac{2\tau}{3}} - X$" e com vencimento no momento $t+\frac{2\tau}{3}$.

Consequentemente, o valor da opção $C^{3}_{t}(F,X,T)$ é obtido mediante o desenvolvimento do segundo membro da expressão

$$C^{3}_{t}(F,X,T)=\left\{c_{t}(F,X,T)+c_{t}\left(F,F^{*}_{\frac{2\tau}{3}},t+\frac{2\tau}{3}\right)-c_{t}\left[c(F,X,T),F^{*}_{\frac{2\tau}{3}}-X,t+\frac{2\tau}{3}\right]\right\}+$$

$$+c_{t}\left(F,F^{*}_{\frac{\tau}{3}},t+\frac{\tau}{3}\right)-$$

$$-c_{t}\left\{c_{t}(F,X,T)+c_{t}\left(F,F^{*}_{\frac{2\tau}{3}},t+\frac{2\tau}{3}\right)-c_{t}\left[c(F,X,T),F^{*}_{\frac{2\tau}{3}}-X,t+\frac{2\tau}{3}\right],F^{*}_{\frac{\tau}{3}}-X,t+\frac{\tau}{3}\right\},$$

o que permite chegar à seguinte fórmula analítica:

$$\boxed{\begin{aligned}
&C_t^3(F, X, T) = \\
&= e^{-r\cdot\frac{\tau}{3}} \cdot \left[F_t \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{3}}\right) - X \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{3}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/3}\right)\right] + \\
&+ e^{-r\cdot\frac{2\tau}{3}} \cdot \left[F_t \cdot N_2\left(-h_{\frac{\tau}{3}}, h_{\frac{2\tau}{3}}; -\sqrt{1/2}\right) - X \cdot N_2\left(\sigma \cdot \sqrt{\tau/3} - h_{\frac{\tau}{3}}, h_{\frac{2\tau}{3}} - \sigma \cdot \sqrt{2\tau/3}; -\sqrt{1/2}\right)\right] + \\
&+ e^{-r\tau} \cdot \left[F_t \cdot N_3\left(-h_{\frac{\tau}{3}}, -h_{\frac{2\tau}{3}}, h_\tau; \sqrt{1/2}, -\sqrt{1/3}, -\sqrt{2/3}\right) - X \cdot N_3\left(\sigma\sqrt{\tau/3} - h_{\frac{\tau}{3}}, \sigma\sqrt{2\tau/3} - h_{\frac{2\tau}{3}}, h_\tau - \sigma\sqrt{\tau}, \sqrt{1/2}, -\sqrt{1/3}, -\sqrt{2/3}\right)\right]
\end{aligned}}$$

sendo,

$$\boxed{h_\tau = \frac{\ln\left(F_t / X\right) + \dfrac{\sigma^2 \cdot \tau}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}};$$

$$\boxed{h_{\frac{2\tau}{3}} = \frac{\ln\left(\dfrac{F_t}{F^*_{\frac{2\tau}{3}}}\right) + \dfrac{\sigma^2 . 2\tau/3}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{2\tau/3}}} \text{ com, } \quad F^*_{\frac{2\tau}{3}}: \boxed{F^*_{\frac{2\tau}{3}} - X = c_{t+\frac{2\tau}{3}}\left(F^*_{\frac{2\tau}{3}}, X, T\right)}.; \text{ e}$$

$$\boxed{h_{\frac{\tau}{3}} = \frac{\ln\left(\dfrac{F_t}{F^*_{\frac{\tau}{3}}}\right) + \dfrac{\sigma^2 \cdot \tau/3}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau/3}}} \text{ com, } \quad F^*_{\frac{\tau}{3}}: \boxed{F^*_{\frac{\tau}{3}} - X = C^2_{t+\frac{\tau}{3}}\left(F^*_{\frac{\tau}{3}}, X, T\right)}.$$

Em síntese, a aproximação polinomial do valor de uma opção de compra "americana" sobre futuros obtém-se mediante a aplicação do seguinte formulário:

APROXIMAÇÃO POLINOMIAL:
OPÇÕES DE COMPRA "AMERICANAS" SOBRE FUTUROS DE OBRIGAÇÕES

$$C_t(F,X,T) \cong 0{,}5 \cdot C_t^1(F,X,T) - 4 \cdot C_t^2(F,X,T) + 4{,}5 \cdot C_t^3(F,X,T) \qquad (159)$$

sendo,

$$C_t^1(F,X,T) = e^{-r\tau} \cdot \left[F_t \cdot N_1(h_\tau) - X \cdot N_1\left(h_\tau - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right] \qquad (160)$$

$$C_t^2(F,X,T) = e^{-r\cdot\tau/2} \cdot \left[F_t \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}}\right) - X \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma\cdot\sqrt{\tau/2}\right)\right] + \qquad (161)$$

$$+e^{-r\cdot\tau} \cdot \left[F_t \cdot N_2\left(-h_{\frac{\tau}{2}}, h_\tau; -\sqrt{1/2}\right) - X \cdot N_2\left(\sigma\cdot\sqrt{\tau/2} - h_{\frac{\tau}{2}}, h_\tau - \sigma\cdot\sqrt{\tau}; -\sqrt{1/2}\right)\right]$$

$$C_t^3(F,X,T) = e^{-r\cdot\tau/3} \cdot \left[F_t \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{3}}\right) - X \cdot N_1\left(h_{\frac{\tau}{3}} - \sigma\cdot\sqrt{\tau/3}\right)\right] + \qquad (162)$$

$$+e^{-r\frac{2\tau}{3}} \cdot \left[F_t \cdot N_2\left(-h_{\frac{\tau}{3}}, h_{\frac{2\tau}{3}}; -\sqrt{1/2}\right) - X \cdot N_2\left(\sigma\cdot\sqrt{\tau/3} - h_{\frac{\tau}{3}}, h_{\frac{2\tau}{3}} - \sigma\cdot\sqrt{2\tau/3}; -\sqrt{1/2}\right)\right] +$$

$$+e^{-r\cdot\tau} \cdot F_t \cdot N_3\left(-h_{\frac{\tau}{3}}, -h_{\frac{2\tau}{3}}, h_\tau; \sqrt{1/2}, -\sqrt{1/3}, -\sqrt{2/3}\right) -$$

$$-e^{-r\cdot\tau} \cdot X \cdot N_3\left(\sigma\cdot\sqrt{\tau/3} - h_{\frac{\tau}{3}}, \sigma\cdot\sqrt{2\tau/3} - h_{\frac{2\tau}{3}}, h_\tau - \sigma\cdot\sqrt{\tau}; \sqrt{1/2}, -\sqrt{1/3}, -\sqrt{2/3}\right)$$

com,

$$h_\tau = \frac{\ln\left(F_t/X\right) + \dfrac{\sigma^2\cdot\tau}{2}}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}} \qquad (163)$$

$$h_{\frac{2\tau}{3}} = \frac{\ln\left(F_t \Big/ F^*_{\frac{2\tau}{3}} \right) + \dfrac{\sigma^2 . 2\tau \big/ 3}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{2\tau \big/ 3}} \qquad (164)$$

$$h_{\frac{\tau}{2}} = \frac{\ln\left(F_t \Big/ F^*_{\frac{\tau}{2}} \right) + \dfrac{\sigma^2 . \tau \big/ 2}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau \big/ 2}} \qquad (165)$$

$$h_{\frac{\tau}{3}} = \frac{\ln\left(F_t \Big/ F^*_{\frac{\tau}{3}} \right) + \dfrac{\sigma^2 . \tau \big/ 3}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau \big/ 3}} \qquad (166)$$

e em que,

$$F^*_{\frac{2\tau}{3}}: \; F^*_{\frac{2\tau}{3}} - X = c_{t+\frac{2\tau}{3}}\left(F^*_{\frac{2\tau}{3}}, X, T \right) \qquad (167)$$

$$F^*_{\frac{\tau}{2}}: \; F^*_{\frac{\tau}{2}} - X = c_{t+\frac{\tau}{2}}\left(F^*_{\frac{\tau}{2}}, X, T \right) \qquad (168)$$

$$F^*_{\frac{\tau}{3}}: \; F^*_{\frac{\tau}{3}} - X = C^2_{t+\frac{\tau}{3}}\left(F^*_{\frac{\tau}{3}}, X, T \right) \qquad (169)$$

A metodologia a utilizar deverá consistir em:

1°) estimar as cotações do futuro "criticas"[230] - $F^*_{\frac{\tau}{3}}$, $F^*_{\frac{\tau}{2}}$ e $F^*_{\frac{2\tau}{3}}$ - mediante a resolução das equações (169), (168) e (167);

2°) calcular o valor dos parâmetros "h" através das equações (163) a (166);

3°) determinar o valor das parcelas C_t^1, C_t^2 e C_t^3, via equações (160), (161) e (162);[231] e

4°) aplicar a aproximação de Geske-Johnson, expressa pela equação (159).

3.2.2.5.2. Opções de venda "americanas" sobre futuros

No caso das opções de venda "americanas" sobre futuros a aproximação de Geske-Johnson assume a forma:

$$\boxed{P_t(F,X,T) \cong 0,5 \cdot P_t^1 - 4 \cdot P_t^2 + 4,5 \cdot P_t^3}$$ [232]

sendo,

$P_t(F,X,T) \equiv$ valor, no momento "t", de uma opção de venda "americana" sobre futuros, com um preço de exercício de "X" e vencimento no período "T";

[230] Dado apenas ser necessário estimar três cotações futuras para o contrato futuro subjacente, este método de avaliação de opções "americanas" sobre futuros revela-se mais operacional do que os modelos binomial ou das diferenças finitas. Pelo contrário, relembre-se que a "aproximação quadrática" do valor de tais opções requer somente a estimação de um preço "critico" para o futuro, razão pela qual é mais fácil de utilizar do que a "aproximação polinomial".

[231] A única dificuldade prática associada à aplicação das equações (161) e (162) poderá apenas residir na forma de obtenção de valores para as funções densidade acumulada das distribuições normais multidimensionais aí presentes, muito embora existam já algoritmos capazes de solucionar facilmente tal problema. A este propósito, vide Drezner, Z., "Computation of the Bivariate Normal Integral", *Mathematics of Computation*, vol. 32, n° 141, Janeiro de 1978, pp. 277-9 e Milton, Roy C., "Computer Evaluation of the Multivariate Normal Integral", *Technometrics*, vol. 14, n° 4, Novembro de 1972, pp. 881-9.

[232] Com vista a melhorar a qualidade da aproximação, poder-se-ia extrapolar o valor de P_t (assim como o valor de C_t) com base num maior número de pontos. Por exemplo, considerando ainda o valor de uma opção (designada por P_t^4) com exercício admissível para os momentos $t+\frac{\tau}{4}$, $t+\frac{\tau}{2}$, $t+\frac{3\tau}{4}$ e T, obter-se-ia a seguinte aproximação:

$$P_t = P_t^4 + \tfrac{29}{3} \cdot (P_t^4 - P_t^3) - \tfrac{23}{6} \cdot (P_t^3 - P_t^2) + \tfrac{1}{6} \cdot (P_t^2 - P_t^1).$$

Contudo, tal procedimento iria necessariamente reduzir a operacionalidade deste método de avaliação (basta ver que ter-se-ia de estimar mais uma cotação "critica" bem como trabalhar com a distribuição normal quadri-dimensional).

$P_t^1 \equiv P_t^1(F, X, T) \equiv$ valor, no momento "t", de uma opção de venda sobre futuros, com idênticos preço de exercício e data de vencimento, mas cujo exercício apenas poderá ocorrer no período "T", isto é, trata-se do valor de uma opção de venda "europeia" sobre futuros;

$P_t^2 \equiv P_t^2(F, X, T) \equiv$ valor, no momento "t", de uma opção de venda sobre futuros, com idênticos preço de exercício e data de vencimento, mas cujo exercício apenas poderá ocorrer nos períodos $t+\frac{\tau}{2}$ e T; e

$P_t^3 \equiv P_t^3(F, X, T) \equiv$ valor, no momento "t", de uma opção de venda sobre futuros, com idênticos preço de exercício e data de vencimento, mas cujo exercício apenas poderá ocorrer nos períodos $t+\frac{\tau}{3}$, $t+\frac{2\tau}{3}$ e T.

Dado estarmos em presença de uma opção de tipo "europeu", o valor de $P_t^1 \equiv P_t^1(F, X, T)$ pode ser obtido através da aplicação da fórmula (73):

$$\boxed{P_t^1(F, X, T) = e^{-r\tau} \cdot \left[X \cdot N_1\left(\sigma\sqrt{\tau} - h_\tau\right) - F_t \cdot N_1\left(-h_\tau\right)\right]}$$

com,

$$\boxed{h_\tau = \frac{\ln\left(F_t / X\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}}$$

Relativamente às parcelas $P_t^2(F, X, T)$ e $P_t^3(F, X, T)$, muito embora o seu valor também pudesse ser determinado com base na metodologia desenvolvida anteriormente para as opções de compra (ou seja, "a la Roll")[233], ir-se-á utilizar o raciocínio elaborado por Geske-Johnson aquando da dedução de uma fórmula analítica aproximada para uma opção de venda "americana" "on the spot". Assim, o valor de uma opção de venda "americana" sobre futuros pode ser visto como o valor actual dos seus cash flows futuros esperados, os quais apenas ocorrerão (isto é, somente serão diferentes de zero) na hipótese de a opção ser exercida, correspondendo então ao *valor de exercício*[234] da opção no instante em que se verifica o seu exercício. Posto isto, a questão resume-se a determinar o "*valor de exercício* esperado" para a opção em cada instante anterior à data do seu vencimento para

[233] A única diferença situar-se-ia ao nível da constituição das respectivas carteiras de arbitragem.
[234] Diferença entre o preço de exercício da opção e a cotação do futuro.

a hipótese do exercício do contrato ocorrer nesse exacto instante, pois o preço da opção será dado pela soma actualizada dessa série infinita de *valores de exercício* esperados.

Ora, o "*valor de exercício* esperado" para a opção num determinado instante é dado pelo produto da probabilidade de o *valor de exercício* da opção superar o seu valor de mercado nesse mesmo instante e de o contrário ter sucedido em todos os instantes anteriores, com a diferença entre o preço de exercício do contrato e o valor esperado para a cotação do futuro nesse mesmo instante (condicionado à hipótese de a opção não ter ainda sido exercida em qualquer instante anterior e denotar um *valor de exercício* superior ao seu valor de mercado no instante em análise). Por seu turno, se designarmos por "F_θ^*" a cotação "critica" do futuro subjacente abaixo da qual a opção deverá ser exercida no momento genérico "t+θ", ou seja, sendo F_θ^*: $X - F_\theta^* = P_{t+\theta}(F_\theta^*, X, T)$, então a probabilidade de o contrato ser exercido num determinado instante não é mais do que a probabilidade de a cotação do futuro ser inferior à cotação "critica" nesse mesmo instante e de o contrário ter sucedido para todos os instantes anteriores.

Com base no raciocínio anteriormente exposto, Geske e Johnson[235] conseguiram traduzir o valor de uma opção "americana" "on the spot" numa série infinita de cash flows incertos, fórmula essa que pode ser facilmente adaptada ao âmbito das opções sobre futuros mediante a consideração da relação (69)[236]:

$$P_t(F, X, T) = X \cdot \omega_2 - F_t \cdot \omega_1$$

com,

$$\begin{aligned}\omega_1 = \Big\{ & e^{-r\cdot dt} \cdot N_1\left[-d_1\left(F_{dt}^*, dt\right)\right] + \\ & + e^{-r\cdot 2dt} \cdot N_2\left[d_1\left(F_{dt}^*, dt\right), -d_1\left(F_{2dt}^*, 2dt\right); -\rho_{dt,2dt}\right] + \\ & + e^{-r\cdot 3dt} \cdot N_3\left[d_1\left(F_{dt}^*, dt\right), d_1\left(F_{2dt}^*, 2dt\right), -d_1\left(F_{3dt}^*, 3dt\right); \rho_{dt,2dt}, -\rho_{dt,3dt}, -\rho_{2dt,3dt}\right] + \\ & + \ldots \Big\}\end{aligned}$$ [237]

[235] Vide Geske, R., e H. Johnson (1984), pp. 1514-15.

[236] $S_t = F_t \cdot e^{-r\cdot\theta}$.

[237] Embora "ω_1" contenha um número infinito de termos, apenas se procede à sua descrição até à terceira ordem, visto que a aproximação polinomial utilizada envolve somente três monómios.

$$\omega_2 = \Big\{ e^{-r \cdot dt} \cdot N_1\left[-d_2\left(F^*_{dt}, dt\right)\right] +$$

$$+ e^{-r \cdot 2dt} \cdot N_2\left[d_2\left(F^*_{dt}, dt\right), -d_2\left(F^*_{2dt}, 2dt\right); -\rho_{dt,2dt}\right] +$$

$$+ e^{-r \cdot 3dt} \cdot N_3\left[d_2\left(F^*_{dt}, dt\right), d_2\left(F^*_{2dt}, 2dt\right), -d_2\left(F^*_{3dt}, 3dt\right); \rho_{dt,2dt}, -\rho_{dt,3dt}, -\rho_{2dt,3dt}\right] +$$

$$+ \ldots \Big\}$$ [238]

e em que,

$$d_1(q,\theta) = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{q}\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \theta}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\theta}}$$

$$d_2(q,\theta) = d_1(q,\theta) - \sigma \cdot \sqrt{\theta}$$

$$F^*_\theta: \quad X - F^*_\theta = P_{t+\theta}\left(F^*_\theta, X, T\right)$$

$$\rho_{\theta,\theta'} = \sqrt{\theta / \theta'} \quad (\theta' > \theta)$$ [239]

Assim sendo, o valor de $P^2_t(F, X, T)$ obtém-se fazendo $dt = \tau/2$, ou seja, considerando a possibilidade de exercício apenas nos momentos $t + \frac{\tau}{2}$ e T:[240]

---

[238] Idem.

[239] Os coeficientes de correlação linear entre os diferentes argumentos das diversas funções densidade acumulada da distribuição normal correspondem à raiz quadrada do rácio entre os correspondentes periodos de tempo, uma vez que se admite que a cotação do futuro subjacente segue um movimento Browniano geométrico (ou seja, que a cotação futura do futuro subjacente possui uma distribuição lognormal). Relativamente ao sinal assumido por tais coeficientes, ele é positivo entre periodos de tempo anteriores ao instante em análise e negativo entre o instante em análise e qualquer periodo de tempo anterior. Isto porque, enquanto que o comportamento a evidenciar por parte da cotação do futuro face ao seu nível "critico" deve ser o mesmo para todos os periodos de tempo anteriores ao instante em análise (ultrapassagem da cotação "critica"), já no momento em análise tal comportamento deverá ser antagónico (cotação do futuro abaixo do seu nível "critico").

[240] Neste caso "ω_1" e "ω_2" são apenas constituídos por dois termos, dado que $2dt = 2 \cdot \frac{\tau}{2} = \tau$.

$$P_t^2(F,X,T)=$$

$$=X\cdot\left\{e^{-r\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot N_1\left[-d_2\left(F^*_{\frac{\tau}{2}},\frac{\tau}{2}\right)\right]+e^{-r\cdot\tau}\cdot N_2\left[d_2\left(F^*_{\frac{\tau}{2}},\frac{\tau}{2}\right),-d_2\left(F^*_{\tau},\tau\right);-\sqrt{\frac{\tau\,2}{\tau}}\right]\right\}-$$

$$-F_t\cdot\left\{e^{-r\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot N_1\left[-d_1\left(F^*_{\frac{\tau}{2}},\frac{\tau}{2}\right)\right]+e^{-r\cdot\tau}\cdot N_2\left[d_1\left(F^*_{\frac{\tau}{2}},\frac{\tau}{2}\right),-d_1\left(F^*_{\tau},\tau\right);-\sqrt{\frac{\tau\,2}{\tau}}\right]\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}&P_t^2(F,X,T)=\\&=e^{-r\cdot\frac{\tau}{2}}\cdot\left[X\cdot N_1\left(\sigma\cdot\sqrt{\tau/2}-h_{\frac{\tau}{2}}\right)-F_t\cdot N_1\left(-h_{\frac{\tau}{2}}\right)\right]+\\&+e^{-r\cdot\tau}\cdot\left[X\cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}}-\sigma\cdot\sqrt{\tau/2},\sigma\cdot\sqrt{\tau}-h_\tau;-\sqrt{1/2}\right)-F_t\cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}},-h_\tau;-\sqrt{1/2}\right)\right]\end{aligned}}$$

sendo,

$$\boxed{h_\tau=\frac{\ln\left(F_t/X\right)+\frac{\sigma^2\cdot\tau}{2}}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}}$$ [241]; e

$$\boxed{h_{\frac{\tau}{2}}=\frac{\ln\left(\frac{F_t}{F^*_{\frac{\tau}{2}}}\right)+\frac{\sigma^2\cdot\tau/2}{2}}{\sigma\cdot\sqrt{\tau/2}}}$$ com, $F^*_{\frac{\tau}{2}}$: $\boxed{X-F^*_{\frac{\tau}{2}}=p_{t+\frac{\tau}{2}}\left(F^*_{\frac{\tau}{2}},X,T\right)}$[242].

[241] $F^*_\tau=X$.

[242] $P^2_{t+\frac{\tau}{2}}=p_{t+\frac{\tau}{2}}$, pois a opção apenas poderá ser exercida na maturidade.

Quanto à parcela $P_t^3(F,X,T)$, a sua fórmula de cálculo obtém-se fazendo $dt = \tau/3$, ou seja, admitindo o exercício da opção nos momentos $t+\dfrac{\tau}{3}$, $t+\dfrac{2\tau}{3}$ e T:

$$P_t^3(F,X,T) =$$

$$= X\cdot\left\{e^{-r\cdot\tau/3}\cdot N_1\left[-d_2\left(F^*_{\frac{\tau}{3}},\frac{\tau}{3}\right)\right]+e^{-r\cdot 2\tau/3}\cdot N_2\left[d_2\left(F^*_{\frac{\tau}{3}},\frac{\tau}{3}\right),-d_2\left(F^*_{\frac{2\tau}{3}},\frac{2\tau}{3}\right);-\sqrt{\frac{\tau/3}{2\tau/3}}\right]+\right.$$

$$\left.+e^{-r\cdot\tau}\cdot N_3\left[d_2\left(F^*_{\frac{\tau}{3}},\frac{\tau}{3}\right),d_2\left(F^*_{\frac{2\tau}{3}},\frac{2\tau}{3}\right),-d_2\left(F^*_{\tau},\tau\right);\sqrt{\frac{\tau/3}{2\tau/3}},-\sqrt{\frac{\tau/3}{\tau}},-\sqrt{\frac{2\tau/3}{\tau}}\right]\right\}-$$

$$-F_t\cdot\left\{e^{-r\cdot\tau/3}\cdot N_1\left[-d_1\left(F^*_{\frac{\tau}{3}},\frac{\tau}{3}\right)\right]+e^{-r\cdot 2\tau/3}\cdot N_2\left[d_1\left(F^*_{\frac{\tau}{3}},\frac{\tau}{3}\right),-d_1\left(F^*_{\frac{2\tau}{3}},\frac{2\tau}{3}\right);-\sqrt{\frac{\tau/3}{2\tau/3}}\right]+\right.$$

$$\left.+e^{-r\cdot\tau}\cdot N_3\left[d_1\left(F^*_{\frac{\tau}{3}},\frac{\tau}{3}\right),d_1\left(F^*_{\frac{2\tau}{3}},\frac{2\tau}{3}\right),-d_1\left(F^*_{\tau},\tau\right);\sqrt{\frac{\tau/3}{2\tau/3}},-\sqrt{\frac{\tau/3}{\tau}},-\sqrt{\frac{2\tau/3}{\tau}}\right]\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&P_t^3(F,X,T) = \\
&= e^{-r\cdot\tau/3}\cdot\left[X\cdot N_1\left(\sigma\cdot\sqrt{\tau/3}-h_{\frac{\tau}{3}}\right)-F_t\cdot N_1\left(-h_{\frac{\tau}{3}}\right)\right]+ \\
&+e^{-r\cdot 2\tau/3}\cdot\left[X\cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{3}}-\sigma\cdot\sqrt{\tau/3},\sigma\cdot\sqrt{2\tau/3}-h_{\frac{2\tau}{3}};-\sqrt{1/2}\right)-F_t\cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{3}},-h_{\frac{2\tau}{3}};-\sqrt{1/2}\right)\right]+ \\
&+e^{-r\cdot\tau}\cdot\left[X\cdot N_3\left(h_{\frac{\tau}{3}}-\sigma\sqrt{\tau/3},h_{\frac{2\tau}{3}}-\sigma\sqrt{2\tau/3},\sigma\sqrt{\tau}-h_{\tau};\sqrt{1/2},-\sqrt{1/3},-\sqrt{2/3}\right)-F_t\cdot N_3\left(h_{\frac{\tau}{3}},h_{\frac{2\tau}{3}},-h_{\tau};\sqrt{1/2},-\sqrt{1/3},-\sqrt{2/3}\right)\right]
\end{aligned}}$$

sendo,

$$\boxed{h_{\tau} = \frac{\ln\left(F_t / X\right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}};$$

$$\boxed{h_{\frac{2\tau}{3}} = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{F^*_{\frac{2\tau}{3}}}\right) + \frac{\sigma^2 . 2\tau/3}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{2\tau/3}}} \text{ com, } F^*_{\frac{2\tau}{3}}: \boxed{X - F^*_{\frac{2\tau}{3}} = p_{t+\frac{2\tau}{3}}\left(F^*_{\frac{2\tau}{3}}, X, T\right)}$$[243].; e

$$\boxed{h_{\frac{\tau}{3}} = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{F^*_{\frac{\tau}{3}}}\right) + \frac{\sigma^2 . \tau/3}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau/3}}} \text{ com, } F^*_{\frac{\tau}{3}}: \boxed{X - F^*_{\frac{\tau}{3}} = P^2_{t+\frac{\tau}{3}}\left(F^*_{\frac{\tau}{3}}, X, T\right)}$$[244].

[243] A partir do momento "$t + \frac{2\tau}{3}$" o exercício da opção apenas poderá ocorrer no seu vencimento, ou seja, passa a tratar-se de um contrato de tipo "europeu" ($P^3_{t+\frac{2\tau}{3}} = p_{t+\frac{2\tau}{3}}$).

[244] $P^3_{t+\frac{\tau}{3}} = P^2_{t+\frac{\tau}{3}}$, visto que após o momento "$t + \frac{\tau}{3}$" restam somente duas oportunidades de exercício da opção (nos períodos "$t + \frac{2\tau}{3}$" e "T").

Em resumo, a aproximação polinomial do valor de uma opção de venda "americana" sobre futuros obtém-se mediante a aplicação do seguinte formulário (de acordo com a metodologia definida para as opções de compra):

APROXIMAÇÃO POLINOMIAL:
OPÇÕES DE VENDA "AMERICANAS" SOBRE FUTUROS DE OBRIGAÇÕES

$$P_t(F,X,T) \cong 0{,}5 \cdot P_t^1(F,X,T) - 4 \cdot P_t^2(F,X,T) + 4{,}5 \cdot P_t^3(F,X,T) \tag{170}$$

sendo,

$$P_t^1(F,X,T) = e^{-r\tau} \cdot \left[X \cdot N_1\left(\sigma\sqrt{\tau} - h_\tau\right) - F_t \cdot N_1(-h_\tau) \right] \tag{171}$$

$$\begin{aligned} P_t^2(F,X,T) &= e^{-r\cdot\tau/2} \cdot \left[X \cdot N_1\left(\sigma \cdot \sqrt{\tau/2} - h_{\frac{\tau}{2}} \right) - F_t \cdot N_1\left(-h_{\frac{\tau}{2}} \right) \right] + \\ &+ e^{-r\cdot\tau} \cdot \left[X \cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/2}, \sigma \cdot \sqrt{\tau} - h_\tau; -\sqrt{1/2} \right) - F_t \cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{2}}, -h_\tau; -\sqrt{1/2} \right) \right] \end{aligned} \tag{172}$$

$$\begin{aligned} P_t^3(F,X,T) &= e^{-r\cdot\tau/3} \cdot \left[X \cdot N_1\left(\sigma \cdot \sqrt{\tau/3} - h_{\frac{\tau}{3}} \right) - F_t \cdot N_1\left(-h_{\frac{\tau}{3}} \right) \right] + \\ &+ e^{-r\cdot 2\tau/3} \cdot \left[X \cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{3}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/3}, \sigma \cdot \sqrt{2\tau/3} - h_{\frac{2\tau}{3}}; -\sqrt{1/2} \right) - F_t \cdot N_2\left(h_{\frac{\tau}{3}}, -h_{\frac{2\tau}{3}}; -\sqrt{1/2} \right) \right] + \\ &+ e^{-r\cdot\tau} \cdot X \cdot N_3\left(h_{\frac{\tau}{3}} - \sigma \cdot \sqrt{\tau/3}, h_{\frac{2\tau}{3}} - \sigma \cdot \sqrt{2\tau/3}, \sigma \cdot \sqrt{\tau} - h_\tau; \sqrt{1/2}, -\sqrt{1/3}, -\sqrt{2/3} \right) - \\ &- e^{-r\cdot\tau} \cdot F_t \cdot N_3\left(h_{\frac{\tau}{3}}, h_{\frac{2\tau}{3}}, -h_\tau; \sqrt{1/2}, -\sqrt{1/3}, -\sqrt{2/3} \right) \end{aligned} \tag{173}$$

com,

$$h_{\tau} = \frac{\ln\left(F_t / X \right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} \tag{174}$$

$$h_{\frac{2\tau}{3}} = \frac{\ln\left(F_t / F^*_{\frac{2\tau}{3}} \right) + \frac{\sigma^2 . 2\tau / 3}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{2\tau / 3}} \tag{175}$$

$$h_{\frac{\tau}{2}} = \frac{\ln\left(F_t / F^*_{\frac{\tau}{2}} \right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau / 2}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau / 2}} \tag{176}$$

$$h_{\frac{\tau}{3}} = \frac{\ln\left(F_t / F^*_{\frac{\tau}{3}} \right) + \frac{\sigma^2 \cdot \tau / 3}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{\tau / 3}} \tag{177}$$

e em que,

$$F^*_{\frac{2\tau}{3}}: \quad X - F^*_{\frac{2\tau}{3}} = p_{t+\frac{2\tau}{3}}\left(F^*_{\frac{2\tau}{3}}, X, T \right) \tag{178}$$

$$F^*_{\frac{\tau}{2}}: \quad X - F^*_{\frac{\tau}{2}} = p_{t+\frac{\tau}{2}}\left(F^*_{\frac{\tau}{2}}, X, T \right) \tag{179}$$

$$F^*_{\frac{\tau}{3}}: \quad X - F^*_{\frac{\tau}{3}} = P^2_{t+\frac{\tau}{3}}\left(F^*_{\frac{\tau}{3}}, X, T \right) \tag{180}$$

3.2.3. Conclusões

A escolha do melhor modelo de avaliação de opções financeiras sobre futuros de obrigações de dívida pública deverá recair, na prática, sobre aquele que fornecer os valores mais próximos possível dos preços de mercado de tais contratos. Ora, em Portugal, a inexistência de um mercado de produtos derivados (futuros e opções) sobre títulos de dívida pública inviabiliza a realização imediata de tal exercício.

Não obstante, a descrição efectuada acerca dos pressupostos e do modo de funcionamento dos diversos modelos de avaliação, permite confronta-los, desde já, em termos de consistência teórica (verosimilhança dos pressupostos adoptados) e ao nível da sua operacionalidade (capacidade de utilização corrente na vida prática).

No que concerne às **opções "europeias"**, estas podem ser avaliadas através do modelo de Black-Scholes, do método de Monte Carlo, do modelo binomial ou do método das diferenças finitas. De qualquer modo, **a avaliação de opções "europeias" sobre futuros de obrigações de dívida pública é geralmente levada a cabo com base no modelo de Black-Scholes**, dado este ser o único modelo de avaliação assente numa fórmula analítica "fechada".

Relativamente às **opções "americanas"**, constata-se que:

i) O método de Monte Carlo revela-se inadequado para avaliar opções "americanas" sobre futuros de obrigações de dívida pública;

ii) Testes empíricos realizados em mercados estrangeiros permitem concluir que o modelo binomial e o método das diferenças finitas oferecem uma boa qualidade de previsão. Contudo, tratam-se de métodos de dificil execução prática;

iii) A aproximação quadrática sugerida por Barone-Adesi e Whaley é de implementação bastante simples;

iv) A aproximação polinomial sugerida por Geske e Johnson e desenvolvida por Whaley mostra-se mais operacional do que o modelo binomial e o método das diferenças finitas, mas de aplicação mais dificil do que a "aproximação quadrática".

v) Tanto a aproximação quadrática como a aproximação polinomial parecem apenas oferecer uma boa qualidade de previsão para opções com maturidade não superior a um ano. Tal facto encontra-se comprovado empiricamente no artigo de Barone-Adesi, G., e R. E. Whaley (1987, pp. 317), muito embora estes autores tenham trabalhado com opções "on the spot".

Posto isto, torna-se possível retirar as seguintes ilações:

1) A avaliação de opções "americanas" sobre futuros de obrigações de dívida pública e com uma maturidade "curta" (inferior a um ano) pode ser facilmente efectuada mediante a utilização da aproximação quadrática de Barone-Adesi e Whaley;

2) Para avaliar opções "americanas" sobre futuros de obrigações de dívida pública quando a maturidade dos contratos é "longa" (superior a um ano) é conveniente recorrer ao modelo binomial ou ao método das diferenças finitas.

3.3. Avaliação de opções financeiras "on the spot" sobre TDP/LP

3.3.1. Introdução

Se admitirmos apenas a existência de uma estrutura a prazo de taxas de juro horizontal, isto é, se pressupusermos que a taxa de juro (r) é constante até à data de vencimento da obrigação, então o modelo de avaliação de opções sobre obrigações torna-se bastante simples:

a) Opções "europeias"

a1) Opções de compra

$$\boxed{c_t\left[D(T_2), X, T_1\right] = e^{-r \cdot \tau_1} \cdot \max\left[D_{T_1}(T_2) - X, 0\right]} \tag{181}$$

a2) Opções de venda

$$\boxed{p_t\left[D(T_2), X, T_1\right] = e^{-r \cdot \tau_1} \cdot \max\left[X - D_{T_1}(T_2), 0\right]} \tag{182}$$

b) Opções "americanas"

b1) Opções de compra

$$\boxed{C_t\left[D(T_2), X, T_1\right] = \max\left[D_t(T_2) - X, c_t\right]} \tag{183}$$

b2) Opções de venda

$$\boxed{P_t\left[D(T_2), X, T_1\right] = \max\left[X - D_t(T_2), p_t\right]} \tag{184}$$

sendo,

t ≡ data de avaliação;

T_1 ≡ data de vencimento da opção;

$\tau_1 = T_1 - t$;

T_2 ≡ data de vencimento do TDP/LP subjacente ($T_2 \geq T_1$);

$D_{T_1}(T_2) \equiv$ preço do TDP/LP subjacente, na data de vencimento da opção:

$$D_{T_1}(T_2) = \sum_{T_1 < k \leq T_2} CF_k \cdot e^{-r(k-T_1)}$$

com, $CF_k \equiv$ cash flow gerado pelo TDP/LP subjacente no período k

$D_t(T_2) \equiv$ preço do TDP/LP subjacente, na data de avaliação:

$$D_t(T_2) = \sum_{t < k \leq T_2} CF_k \cdot e^{-r(k-t)}$$

No entanto, o modelo de avaliação associado às fórmulas (181) a (184) possui uma aderência à realidade bastante reduzida. Isto porque, o pressuposto acerca da inalterabilidade da taxa de juro é contrariado pela evidência empírica e o valor de uma obrigação depende, em grande parte, das variações ocorridas ao nível dessa variável.

De facto, a avaliação de opções "on the spot" sobre obrigações é algo complexa, exactamente pelo facto de ser extremamente difícil modelizar o comportamento estocástico das taxas de juro.

3.3.2. Modelo de Black-Scholes

O modelo de Black-Scholes, não obstante a sua simplicidade e corrente utilização, envolve três problemas ao nível da sua aplicação à avaliação de opções "on the spot" sobre TDP/LP, a saber:

i) Por um lado, este modelo pressupõe que a taxa de juro é constante, o que no caso das opções sobre obrigações é algo "forçado" pois, para além de contrariar a evidência empírica, como o valor de uma obrigação é determinado pela evolução das taxas de juro, tal pressuposto também é contraditório com o comportamento estocástico assumido para o valor do TDP/LP subjacente à opção[245]. Deste modo, a solução adoptada para viabilizar a utilização do modelo de Black-Scholes consiste em admitir que a taxa de juro até à maturidade da opção (isto é, a taxa de juro de curto prazo) é constante, muito embora haja incerteza acerca da evolução da taxa de juro a partir do vencimento da opção (taxa de juro de longo prazo). De qualquer forma, esta "solução" apenas é aplicável a opções com uma maturidade reduzida.

ii) Por outro lado, o modelo em análise também admite que a volatilidade do preço do activo subjacente é constante. Ora, sendo o activo subjacente uma obrigação, então tal não acontece, uma vez que a volatilidade do valor de uma obrigação depende da sua "duration"[246] a qual, por seu turno, varia com o tempo em falta para a maturidade do título[247] (isto é, à medida que a maturidade da obrigação vai ficando mais próxima e portanto a sua "duração" vai diminuindo, a sua volatilidade também diminui[248]). Com efeito, o pressuposto de "volatilidade constante" associado ao modelo de Black-Scholes é tanto menos realista quanto mais próxima estiver a maturidade da opção da data de vencimento da obrigação subjacente, pelo que, e tal como em relação ao problema anterior, a utilização do modelo de Black-Scholes para avaliar opções sobre obrigações apenas poderá ser aceite caso se tratem de contratos com um prazo reduzido.

iii) Finalmente, o modelo de Black-Scholes assume que o preço do activo subjacente segue um processo de difusão continuo designado por *processo de ITO*. Todavia, tratando-se de uma obrigação com cupões, tal pressuposto já não é admissível, uma vez que na data de liquidação de cada cupão o valor da obrigação regista uma redução brusca pelo montante do juro vencido. Assim sendo,

> iii1) como este último problema não se coloca ao nível das obrigações de cupão zero, então pode-se utilizar o modelo de Black-Scholes para avaliar opções de compra "europeias" ou "americanas"[249] bem como opções de venda "europeias" sobre obrigações de cupão zero de dívida pública ("OCZ/DP"):

---

[245] Movimento geométrico browniano.
[246] Vide Schaefer, S. M., e E. S. Schwartz, "Time-Dependent Variance and the Pricing of Bond Options", *The Journal of Finance*, vol. XLII, nº 5, December 1987.
A relação entre as noções de "volatilidade" e "duração" de uma obrigação será explanada aquando da análise do modelo de Schaefer e Schwartz (ponto 3.3.5.).
[247] Bem como com as taxas de juro.
[248] Até porque o valor da obrigação tende a convergir para o seu valor nominal.
[249] Pois, não havendo cupões, a probabilidade de exercício antecipado é nula.

MODELO DE BLACK-SCHOLES:
OPÇÕES DE COMPRA "EUROPEIAS" OU "AMERICANAS" SOBRE OCZ/DP

$$c_t(B,X,T) = C_t(B,X,T) = B_t \cdot N(h) - X \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(h - \sigma \cdot \sqrt{\tau}\right) \quad (185)$$

sendo,

$$h = \frac{\ln\left(\frac{B_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}$$

MODELO DE BLACK-SCHOLES:
OPÇÕES DE VENDA "EUROPEIAS" SOBRE OCZ/DP

$$p_t(B,X,T) = X \cdot e^{-r\tau} \cdot N\left(\sigma \cdot \sqrt{\tau} - h\right) - B_t \cdot N(-h) \quad (186)$$

sendo,

$$h = \frac{\ln\left(\frac{B_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}$$

com,
t ≡ data de avaliação;
T ≡ data de vencimento da opção;
τ = T - t;
B_t ≡ cotação da OCZ/DP subjacente, na data de avaliação;
c_t ≡ valor actual de uma call "europeia" sobre OCZ/DP;
C_t ≡ valor actual de uma call "americana" sobre OCZ/DP;
p_t ≡ valor actual de uma put "europeia" sobre OCZ/DP;
r ≡ taxa de juro sem risco; e
σ ≡ volatilidade da cotação da OCZ/DP subjacente.

No entanto, há que não esquecer que os resultados fornecidos pelas expressões (185) e (186) serão sempre afectados pelo facto de se assumir que os parâmetros "r" e "σ" são constantes.

iii2) pelo contrário, no caso das opções sobre obrigações com cupões, o problema da descontinuidade do processo estocástico inerente à cotação do activo subjacente deve e pode ser contornado, para opções "europeias", mediante a aproximação do valor da opção em análise ao valor de uma opção sobre um contrato forward para a obrigação em causa e com vencimento na maturidade da opção[250]. Isto porque, ao contrário do preço de uma obrigação, uma cotação forward é susceptível de seguir um movimento geométrico browniano.

Recordando as fórmulas de Black-Scholes para opções sobre futuros:

MODELO DE BLACK-SCHOLES:
OPÇÕES DE COMPRA "EUROPEIAS"
SOBRE OBRIGAÇÕES COM CUPÕES

$$c_t(S,X,T) \cong e^{-r\tau}\cdot\left[F_t\cdot N(h)-X\cdot N\left(h-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right] \qquad (187)$$

$$\text{sendo } \mathbf{h}=\frac{\ln\left(F_t/X\right)+\sigma^2\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

MODELO DE BLACK-SCHOLES:
OPÇÕES DE VENDA "EUROPEIAS"
SOBRE OBRIGAÇÕES COM CUPÕES

$$p_t(S,X,T) \cong e^{-r\tau}\cdot\left[-F_t\cdot N(-h)+X\cdot N\left(\sigma\sqrt{\tau}-h\right)\right] \qquad (188)$$

$$\text{sendo } \mathbf{h}=\frac{\ln\left(F_t/X\right)+\sigma^2\tau/2}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}}$$

com,

S ≡ valor de transacção da obrigação subjacente (ou seja, o seu valor de cotação acrescido dos juros vencidos);

X ≡ preço de exercício da opção, o qual deverá corresponder ao **valor de transacção[251] da obrigação subjacente na data de vencimento da opção** (caso haja lugar ao seu exercício);

t ≡ data de avaliação;

T ≡ data de vencimento da opção;

τ = T - t;

r ≡ taxa de juro sem risco;

σ ≡ volatilidade da cotação "F";

F_t ≡ **cotação forward (ou futura) da obrigação subjacente para a data de vencimento da opção. Esta pode ser obtida de duas formas, a saber:**

[250] Isto é, através da aproximação ao valor de uma opção sobre futuros da obrigação em causa, visto a taxa de juro ser suposta constante.

[251] Valor de cotação mais eventuais juros vencidos, à data de vencimento da opção.

1) através da cotação de um contrato forward (ou futuro) sobre a obrigação em causa e para a data de vencimento da opção, caso tais contratos estejam disponíveis no mercado; ou
2) caso contrário, através da determinação do valor, actualizado para a data de vencimento da opção, dos cash flows a gerar pela obrigação subjacente a partir de tal data, isto é, fazendo

$$\boxed{F_t = (S_t - I)\cdot e^{r\tau}} \qquad (189)$$

em que,

I ≡ valor actual (isto é, na data de avaliação) dos cupões vincendos até ao momento "T", ou seja,

$$I = \sum_{k=t1}^{tu} J_k \times e^{-r(k-t)}, \text{ onde}$$

J_k ≡ cupão gerado pela obrigação no momento "k"; e
k ≡ data de geração do k-ésimo cupão, com t < t1 e T > tu.

De facto, embora no ponto 3.2.1.1. a relação entre as cotações spot e futura de um activo que não liberte fluxos financeiros fosse dada pela expressão (69), tratando-se de obrigações que gerem cash flows durante o intervalo de tempo " τ" tal relação passa a ser fornecida pela equação (189). Isto porque, como:

1) $X = f_t \Rightarrow c_t = p_t$[252], sendo

$c_t = c_t(S, X, T)$ ≡ valor de uma opção de compra "europeia" sobre um TDP/LP com cupões;

$p_t = p_t(S, X, T)$ ≡ valor de uma opção de venda "europeia" sobre um TDP/LP com cupões;

X ≡ preço de exercício das opções; e

f_t ≡ cotação, no momento "t", de um contrato forward sobre a obrigação subjacente às opções.

2) $c_t - p_t = S_t - I - X\cdot e^{-r\tau}$, pela expressão (58); e

3) $F_t = f_t$, sendo

F_t ≡ cotação, no momento "t", de um contrato futuro sobre a obrigação subjacente às opções e com a mesma maturidade que o contrato forward,

pois as taxas de juro são supostas constantes[253], então,

$$\begin{cases} X = f_t \Rightarrow c_t = p_t \\ c_t - p_t = S_t - I - X\cdot e^{-r\tau} \Rightarrow 0 = S_t - I - F_t\cdot e^{-r\tau} \Leftrightarrow F_t = (S_t - I)\cdot e^{r\tau} \\ F_t = f_t \end{cases}$$

[252] Demonstração idêntica à efectuada no quesito 3.2.1.1.
[253] Vide demonstração no ponto 3.2.1.1.

A título de curiosidade, refira-se que as expressões (187) e (188) podem ser igualmente deduzidas mediante a introdução de uma pequena correcção ao nível do modelo original de Black-Scholes -equações (72) e (73). Na verdade, para avaliar opções "europeias" sobre obrigações com cupões basta substituir nas equações (72) e (73) "S_t" por "$S_t - I$"[254], pois:

$$\begin{cases} c_t = (S_t - I)\cdot N(h) - e^{-r\tau}\cdot X\cdot N(h-\sigma\cdot\sqrt{\tau}) \\ p_t = e^{-r\tau}\cdot X\cdot N(\sigma\cdot\sqrt{\tau}-h) - (S_t - I)\cdot N(-h) \\ h = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_t - I}{X}\right)+\left(r+\sigma^2/2\right)\cdot\tau}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Colocando $e^{-r\tau}$ em evidência nas duas primeiras equações e multiplicando $(S_t - I)$ por $e^{r\tau}\cdot e^{-r\tau}$ na terceira equação, vem

$$\Leftrightarrow\begin{cases} c_t = e^{-r\tau}\cdot\left[(S_t - I)\cdot e^{r\tau}\cdot N(h) - X\cdot N(h-\sigma\cdot\sqrt{\tau})\right] \\ p_t = e^{-r\tau}\cdot\left[X\cdot N(\sigma\cdot\sqrt{\tau}-h) - (S_t - I)\cdot e^{r\tau}\cdot N(-h)\right] \Leftrightarrow \\ h = \dfrac{\ln\left[\dfrac{(S_t - I)\cdot e^{r\tau}}{X}\right]+\ln e^{-r\tau}+r\cdot\tau+\sigma^2/2\cdot\tau}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}} \end{cases}$$

Finalmente, atendendo à expressão (189), obtém-se

[254] Artifício de cálculo semelhante ao que é utilizado para avaliar opções "europeias" sobre acções com dividendos "certos" através do modelo de Black-Scholes.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_t = e^{-r\tau} \cdot \left[F_t \cdot N(h) - X \cdot N\left(h - \sigma \cdot \sqrt{\tau}\right) \right] \\ p_t = e^{-r\tau} \cdot \left[X \cdot N\left(\sigma \cdot \sqrt{\tau} - h\right) - F_t \cdot N(-h) \right] \\ h = \dfrac{\ln\left(F_t / X \right) + \sigma^2 \cdot \tau / 2}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} \end{cases}$$, como queríamos demonstrar.

Por último, é necessário não esquecer que as fórmulas (187) e (188) apenas são aplicáveis a opções de tipo "europeu" e que os resultados por elas fornecidos serão sempre afectados pelo facto de os parâmetros "r" e "σ" serem considerados constantes. No que concerne às opções "americanas" sobre obrigações, pode-se aplicar o artifício de cálculo exposto anteriormente, através dos métodos numéricos desenvolvidos para opções "americanas" sobre futuros. Todavia, tal procedimento não só é pouco operacional como também não permite contornar os dois pressupostos anteriores.

3.3.3. Modelos de avaliação de opções sobre TDP/LP derivados das teorias de equilíbrio da estrutura temporal de taxas de juro

A grande vantagem deste tipo de modelos reside no facto de permitir abandonar o pressuposto de acordo com o qual a taxa de juro de curto prazo é constante, na medida em que consideram um cenário de incerteza associado à evolução de uma ou mais taxas de juro mediante a sua sujeição a um determinado processo estocástico[255].

No entanto, a utilização destes modelos de avaliação de opções é, normalmente, bastante complexa, uma vez que:
i) tais modelos requerem a estimação do processo estocástico seguido pelas taxas de juro de curto prazo;
ii) tratam-se de modelos que exigem a determinação do preço de mercado do prémio de risco de taxa de juro;
iii) estes modelos requerem a estimação dos preços da obrigação subjacente correspondentes às restrições impostas à equação diferencial do valor da opção, na maturidade desta; e
iv) regra geral, não é possível obter uma solução analítica "fechada".

3.3.3.1. Modelo de Vasicek

Vasicek[256] pressupõe que:

i) O processo estocástico seguido pelas taxas de juro de curto prazo ("r") é do tipo

$$dr = a \cdot (b - r) \cdot dt + \sigma \cdot dZ$$

sendo,
"b" (taxa de juro normal), "a" (velocidade de ajustamento da taxa de juro de curto prazo ao seu nível normal) e "σ" (desvio-padrão da taxa de juro de curto prazo) constantes positivas; e
"dZ" um *processo de Wiener*.

Trata-se, portanto, de um modelo unifactorial, em que "r" é a variável de estado.

ii) E, o preço das obrigações de cupão zero de dívida pública ("OCZ/DP") bem como o valor das opções sobre estes títulos dependem apenas da variável de estado "r".

Com base nos dois pressupostos anteriores é possível deduzir a equação diferencial do valor de uma opção sobre OCZ/DP. De facto, designando por V = V(r,t) o preço de

[255]Isto é, nestes modelos as variáveis de estado são uma ou mais taxas de juro.
[256]Vasicek, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, nº 5, 1977, pp. 177-88

uma opção[257] sobre uma OCZ/DP e aplicando o *Lema de ITO*, resulta:

$$dV = \left[a\cdot(b-r)\cdot\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right]\cdot dt+\sigma\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\cdot dZ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dV = \mu\cdot V\cdot dt+\sigma\cdot\frac{V_r}{V}\cdot V\cdot dZ, \qquad \text{com } \mu=\frac{1}{V}\cdot\left[a\cdot(b-r)\cdot\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right]$$

Mas, de forma a eliminar quaisquer oportunidades de arbitragem é necessário que

$$\mu - r = \lambda\cdot\sigma\cdot\frac{V_r}{V} \Leftrightarrow$$

sendo,

λ ≡ preço de mercado do prémio de risco de taxa de juro de curto prazo[258]

e portanto,

$$\Leftrightarrow \frac{1}{V}\cdot\left[a\cdot(b-r)\cdot V_r + V_t + \tfrac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot V_{rr}\right] - r = \lambda\cdot\sigma\cdot\frac{V_r}{V}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{V_t + \left[a\cdot(b-r)-\lambda\cdot\sigma\right]\cdot V_r + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot V_{rr} - r\cdot V = 0} \qquad (190)$$

A expressão (190) representa assim a equação diferencial de Vasicek para o valor de uma opção sobre OCZ/DP[259].

Muito embora Vasicek apenas tenha desenvolvido uma solução analítica da equação anterior para o valor de uma OCZ/DP, Jamshidian[260] demonstrou que:

1) É possível obter, para a equação diferencial (168), soluções analíticas relativamente simples e associadas ao valor de opções "europeias" sobre OCZ/DP[261].

No caso de uma call "europeia" ou "americana"[262], a fórmula de avaliação é dada por[263]:

---

[257] Seja uma opção de compra ou de venda e de tipo "europeu" ou "americano".

[258] O parâmetro "λ" mede o rendimento adicional exigido pelos investidores de forma a compensa-los pelo investimento num activo com risco.

[259] Mais genericamente, traduz a equação diferencial do valor de uma OCZ/DP ou do valor de um seu qualquer produto derivado (nomeadamente, do preço de uma opção).

[260] Jamshidian, F., "An Exact Bond Option Formula", *The Journal of Finance*, vol. XLIV, nº 1, 1989, pp. 205-209.

[261] Ou opções "europeias" sobre TDP/LP com cupões mas que não gerem cash flows durante a vigência do contrato.

[262] Pois, o activo subjacente é uma OCZ/DP e portanto não gera fluxos financeiros durante a vida da opção.

[263] Ver demonstração na página 206 do artigo supracitado.

MODELO DE VASICEK / FÓRMULA DE JAMSHIDIAN: OPÇÕES DE COMPRA "EUROPEIAS" OU "AMERICANAS" SOBRE OCZ/DP

$$c_t(B,X,T_1)=C_t(B,X,T_1)=Vn\cdot B(r,t,T_2)\cdot N(h)-B(r,t,T_1)\cdot X\cdot N(h-\sigma_b) \tag{191}$$

sendo,

$$h=\frac{1}{\sigma_b}\cdot\ln\left[\frac{B(r,t,T_2)}{B(r,t,T_1)\cdot X}\right]+\frac{\sigma_b}{2}$$

$$\sigma_b=\sigma\cdot\left[\frac{1-e^{-2a\cdot(T_1-t)}}{2a}\right]^{1/2}\cdot\frac{1-e^{-a\cdot(T_2-T_1)}}{a}$$

com,

$t \equiv$ data de avaliação;

$T_1 \equiv$ data de vencimento da opção;

$T_2 \equiv$ data de vencimento da OCZ/DP subjacente ($T_2 \geq T_1$);

Vn $\equiv$ valor nominal da OCZ/DP subjacente à opção;

$B(r,t,T_2) \equiv$ cotação, na data de avaliação, de uma OCZ/DP com vencimento no momento T_2 e de valor nominal unitário;

$B(r,t,T_1) \equiv$ cotação, na data de avaliação, de uma OCZ/DP com vencimento na maturidade da opção e de valor nominal unitário;

X $\equiv$ preço de exercício;

$c_t(B,X,T_1) \equiv$ valor, na data de avaliação, de uma opção de compra "europeia" sobre OCZ/DP; e

$C_t(B,X,T_1) \equiv$ valor, na data de avaliação, de uma opção de compra "americana" sobre OCZ/DP.

Tratando-se de uma put "europeia", a obtenção do seu valor de equilíbrio decorre da aplicação do teorema da paridade put-call[264]:

$$\begin{cases} c_t(B,X,T_1)=Vn\cdot B(r,t,T_2)\cdot N(h)-B(r,t,T_1)\cdot X\cdot N(h-\sigma_b) \\ c_t(B,X,T_1)-p_t(B,X,T_1)=Vn\cdot B(r,t,T_2)-X\cdot B(r,t,T_1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_t(B,X,T_1)=B(r,t,T_1)\cdot X\cdot\left[1-N(h-\sigma_b)\right]-Vn\cdot B(r,t,T_2)\cdot\left[1-N(h)\right]$$

$$\Updownarrow$$

[264] Adaptação da expressão (56) a um cenário de taxas de juro estocásticas.

MODELO DE VASICEK / FÓRMULA DE JAMSHIDIAN:
OPÇÕES DE VENDA "EUROPEIAS" SOBRE OCZ/DP

$$p_t(B,X,T_1)=B(r,t,T_1)\cdot X\cdot N(\sigma_b-h)-Vn\cdot B(r,t,T_2)\cdot N(-h) \qquad (192)$$

sendo,

$$h=\frac{1}{\sigma_b}\cdot\ln\left[\frac{B(r,t,T_2)}{B(r,t,T_1)\cdot X}\right]+\frac{\sigma_b}{2}$$

$$\sigma_b=\sigma\cdot\left[\frac{1-e^{-2a\cdot(T_1-t)}}{2a}\right]^{1/2}\cdot\frac{1-e^{-a\cdot(T_2-T_1)}}{a}$$

No que concerne às opções "americanas" sobre OCZ/DP, a equação diferencial (190) terá de ser resolvida, sujeita às restrições apropriadas, através de métodos numéricos.

2) É possível generalizar as soluções analíticas anteriores, relativas a opções "europeias" sobre OCZ/DP, para valorizar opções "europeias" sobre carteiras de OCZ/DP.

Isto porque, como qualquer obrigação é uma função decrescente da taxa de juro ("r"), então uma opção sobre uma carteira de obrigações de cupão zero é equivalente a uma carteira de opções sobre cada uma das obrigações de cupão zero (mas obviamente, para diferentes preços de exercício). Assim, a avaliação de uma opção "europeia" sobre uma carteira de OCZ/DP é feita mediante a avaliação de um conjunto de opções "europeias" sobre diversas OCZ/DP com diversos preços de exercício, isto é:

O valor de uma opção "europeia", com um preço de exercício "X" e maturidade no período "T_1", sobre uma carteira de OCZ/DP que gere um fluxo financeiro "Vn_k" nos momentos "t_k" (com $t_k > T_1$ e $1 \leq k \leq n$) é dado pela soma do valor de "n" opções "europeias" sobre OCZ/DP, com maturidade no período "t_k" e com um preço de exercício "X_k" tal que:

$$\boxed{X_k = B(r^*,T_1,t_k) \quad \text{para } 1\leq k\leq n} \qquad (193)$$

com, $$\boxed{r^*:\ X=\sum_{k=1}^{n} Vn_k\cdot B(r^*,T_1,t_k)}\text{[265]} \qquad (194)$$

[265] O parâmetro "r*" traduz a taxa de juro para a qual o valor da carteira de OCZ/DP subjacente, na maturidade da opção, coincide com o preço de exercício desta última, isto é, corresponde ao nível de taxa de juro a partir do qual ocorre o exercício da opção.

Tratando-se de uma opção de compra, o seu valor é dado por:

$$\boxed{c_t(D,X,T_1)=\sum_{k=1}^{n} Vn_k \cdot c_t(B,X_k,t_k)} \qquad (195)$$

em que, $c_t(B,X_k,t_k)$ é obtido através da aplicação da fórmula (191), considerando um valor nominal unitário, e "D" representa o valor da carteira de OCZ/DP subjacente à opção.

Para calcular o valor de uma opção de venda, basta aplicar o teorema da paridade "put-call"[266]:

$$\boxed{p_t(D,X,T_1):\quad c_t(D,X,T_1)-p_t(D,X,T_1)=\sum_{k=1}^{n} Vn_k \cdot B(r,t,t_k)-B(r,t,T_1)\cdot X} \qquad (196)$$

Note-se que os resultados anteriores -fórmulas (193) a (196)- são igualmente aplicáveis a opções "europeias" sobre obrigações de dívida pública com cupões, uma vez que uma obrigação com cupões pode ser concebida como tratando-se de uma carteira de "obrigações de cupão zero" (cujos valores nominais correspondem a cada um dos fluxos financeiros libertos pela obrigação subjacente, após a maturidade da opção). Para tal, basta considerar que "Vn_k" traduz o fluxo financeiro gerado pela obrigação subjacente no período "t_k" (com $t_k > T_1$ e $1 \leq k \leq n$), que "D" representa o valor da obrigação subjacente e que a fórmula (196) consiste numa adaptação da equação (58).

[266] Adaptação da fórmula (56) a um cenário de taxas de juro não determinísticas.

3.3.3.2. Modelo de Cox, Ingersoll e Ross (Modelo CIR)

Cox, Ingersoll e Ross[267], no contexto de uma teoria de equilíbrio geral, admitiram que o processo estocástico seguido pelas taxas de juro de curto prazo seria do seguinte tipo:

$$dr = a \cdot (b - r) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{r} \cdot dZ$$

sendo,

"b" (taxa de juro normal), "a" (velocidade de ajustamento da taxa de juro de curto prazo ao seu nível normal) e "σ" (desvio-padrão da taxa de juro de curto prazo) constantes positivas; e

"dZ" um *processo de Wiener*.

Consequentemente, a equação diferencial fundamental do valor de uma OCZ/DP (representado por "B"), ou de um qualquer seu produto derivado, é dada por[268]:

$$\boxed{B_t + \left[a \cdot (b - r) - \lambda \cdot \sigma \cdot \sqrt{r}\right] \cdot B_r + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot r \cdot B_{rr} - r \cdot B = 0} \qquad (197)$$

No entanto, estes autores limitaram-se a deduzir uma fórmula analítica para o valor de uma OCZ/DP[269],

$$\boxed{B(r,t,T) = \alpha(t,T) \cdot e^{-\beta(t,T) \cdot r}} \qquad (198)$$

sendo,

B(r,t,T) ≡ valor, no momento "t", de uma OCZ/DP com vencimento no momento "T";

$$\alpha(t,T) = \left\{ \frac{2\gamma \cdot e^{[(a+\lambda+\gamma)(T-t)]/2}}{(\gamma + a + \lambda) \cdot \left[e^{\gamma(T-t)} - 1\right] + 2\gamma} \right\}^{2ab/\sigma^2};$$

$$\beta(t,T) = \frac{2 \cdot \left[e^{\gamma(T-t)} - 1\right]}{(\gamma + a + \lambda) \cdot \left[e^{\gamma(T-t)} - 1\right] + 2\gamma}; \text{ e}$$

$$\gamma = \left[(a+\lambda)^2 + 2\sigma^2\right]^{1/2},$$

[267] Cox, J. C., J. E. Ingersoll, e S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, vol. 53, nº 2, 1985, pp. 385-407.

[268] Basta aplicar a mesma metodologia empregue para deduzir a equação diferencial de Vasicek.

[269] Cox, J. C., J. E. Ingersoll, e S. A. Ross (1985), pp. 393.

e uma solução analítica unicamente para o valor de uma call "europeia" ou "americana" sobre uma OCZ/DP[270]:

MODELO CIR:
<u>OPÇÕES DE COMPRA "EUROPEIAS" OU "AMERICANAS" SOBRE OCZ/DP</u>

$$\boxed{\begin{gathered} c_t(B,X,T_1) = C_t(B,X,T_1) = \\ = B(r,t,T_2)\cdot\chi^2\left\{2r^*\cdot\left[\phi+\psi+\beta(T_1,T_2)\right];\frac{4ab}{\sigma^2};\frac{2\phi^2\cdot r\cdot e^{\gamma(T_1-t)}}{\phi+\psi+\beta(T_1,T_2)}\right\} - \\ -B(r,t,T_1)\cdot X\cdot\chi^2\cdot\left[2r^*\cdot(\phi+\psi);\frac{4ab}{\sigma^2};\frac{2\phi^2\cdot r\cdot e^{\gamma(T_1-t)}}{\phi+\psi}\right]\end{gathered}} \quad (199)$$

sendo,

$T_1 \equiv$ data de vencimento da opção;

$T_2 \equiv$ data de vencimento da OCZ/DP subjacente;

$B(r,t,T_2) \equiv$ valor, no momento "t", da OCZ/DP subjacente à opção, obtido através da fórmula (198);

$B(r,t,T_1) \equiv$ valor, no momento "t", de uma OCZ/DP com vencimento na maturidade da opção e de valor nominal unitário, obtido mediante a fórmula (198);

X ≡ preço de exercício da opção;

$$\phi = \frac{2\gamma}{\sigma^2\cdot\left[e^{\gamma(T_1-t)}-1\right]};$$

$$\psi = (a+\lambda+\gamma)/\sigma^2;$$

$$r^* = \left\{\ln\left[\frac{\alpha(T_1,T_2)}{X}\right]\right\}\Big/\beta(T_1,T_2);$$ [271] e

$\chi^2(\cdot) \equiv$ função distribuição qui-quadrado não-central.

Não obstante, Hull e White[272] aplicaram ao modelo CIR uma versão modificada do método das diferenças finitas explícitas, permitindo assim obter soluções numéricas para o valor de opções de compra e de venda, "europeias" ou "americanas", sobre OCZ/DP ou sobre obrigações de dívida pública com cupões:

---

[270] Cox, J. C., J. E. Ingersoll, e S. A. Ross (1985), pp. 396.

[271] Isto é, "r*" traduz a taxa de juro critica abaixo da qual ocorre o exercício da opção, ou seja,

$$r^*: \quad X = B(r^*, T_1, T_2).$$

[272] Hull, J., e A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 25, nº 1, 1990, pp. 87-100.

a) Avaliação de opções sobre OCZ/DP

1°) avaliação da OCZ/DP subjacente

O primeiro passo consiste em determinar o valor da OCZ/DP subjacente, através do método das diferenças finitas explícitas[273].

Ora, sendo

$$dr = a\cdot(b-r)\cdot dt + \sigma\cdot\sqrt{r}\cdot dZ$$

é conveniente definir uma nova variável de estado -ϕ- cujo desvio padrão instantâneo seja constante, isto é, aplicando o *Lema de ITO* a

$$\phi = \phi(r,t), \text{ vem}$$

$$d\phi = \left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot a\cdot(b-r) + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\cdot\sigma^2\cdot r\right]\cdot dt + \frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\sigma\cdot\sqrt{r}\cdot dZ$$

e portanto $\phi(r,t)$ deverá ser tal que $\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\sigma\cdot\sqrt{r}$ seja constante. Nesse sentido, Hull e White sugerem a seguinte transformação: $\phi = \sqrt{r}$.[274]

Todavia, num mercado neutral face ao risco verifica-se que

$$dr = \left[a\cdot(b-r) - \sigma\cdot u\cdot r\right]\cdot dt + \sigma\cdot\sqrt{r}\cdot dZ,$$

sendo "$u\cdot\sqrt{r}$" o preço de mercado do prémio de risco, e consequentemente

$$d\phi = q\cdot dt + v\cdot dZ,$$

em que

$$v = \sigma/2$$

e

$$q = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cdot\left[a\cdot(b-r) - \sigma\cdot u\cdot r\right] + 0 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4\cdot r\cdot\sqrt{r}}\right)\cdot\sigma^2\cdot r =$$

$$= \frac{4ab-\sigma^2}{8\phi} - \frac{\phi}{2}\cdot(a+\sigma\cdot u)$$

Ora, como ϕ pode assumir qualquer valor positivo, então "q" não é limitado e portanto a transformação operada anteriormente não assegura, por si só, que a solução estimada seja convergente. Deste modo, Hull e White propõem ainda uma outra alteração ao método das diferenças finitas explícitas[275], a saber:

[273] Dado tratar-se de um método mais simples do que o método das diferenças finitas implícitas.

[274] De facto, como $\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}}$ então $\frac{\partial\phi}{\partial r}\cdot\sigma\cdot\sqrt{r} = \sigma/2$ é constante.

[275] Hull, J., e A. White (1990), pp. 93-96.

$$B_{i,j} = \frac{1}{1+\phi_j^2 \cdot \Delta t} \cdot \left[p_{j,j-1} \cdot B_{i+1,j-1} + p_{j,j} \cdot B_{i+1,j} + p_{j,j+1} \cdot B_{i+1,j+1} \right] \tag{200}$$

$j = 1, 2, \ldots, n-1$
$i = 0, 1, \ldots, m$

$$B_{i,0} = \frac{1}{1+\phi_0^2 \cdot \Delta t} \cdot \left[p_{0,0} \cdot B_{i+1,0} + p_{0,1} \cdot B_{i+1,1} + p_{0,2} \cdot B_{i+1,2} \right] \tag{201}$$

$i = 0, \ldots, m$

$$B_{i,n} = \frac{1}{1+\phi_n^2 \cdot \Delta t} \cdot \left[p_{n,n-2} \cdot B_{i+1,n-2} + p_{n,n-1} \cdot B_{i+1,n-1} + p_{n,n} \cdot B_{i+1,n} \right] \tag{202}$$

$i = 0, \ldots, m$

sendo,

$B_{m,j} \equiv$ **valor nominal da OCZ/DP subjacente, para** $j = 0, \ldots, n$

$$p_{j,j-1} = \frac{1}{2} \cdot \left[j^2 + j - (1+2j) \cdot \frac{E(\phi)}{\Delta\phi} + \frac{E(\phi)^2}{\Delta\phi^2} + \frac{\nu^2 \cdot \Delta t}{\Delta\phi^2} \right] \tag{203}$$

$$p_{j,j} = 1 - j^2 + \frac{2j \cdot E(\phi)}{\Delta\phi} - \frac{E(\phi)^2}{\Delta\phi^2} - \frac{\nu^2 \cdot \Delta t}{\Delta\phi^2} \tag{204}$$

$$p_{j,j+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[j^2 - j + (1-2j) \cdot \frac{E(\phi)}{\Delta\phi} + \frac{E(\phi)^2}{\Delta\phi^2} + \frac{\nu^2 \cdot \Delta t}{\Delta\phi^2} \right] \tag{205}$$

$$\frac{\nu^2 \cdot \Delta t}{\Delta\phi^2} = \frac{1}{3}$$

$\Delta\phi \equiv$ **incremento associado à evolução da variável ϕ:**

$$\phi_j = \phi_0 + j \cdot \Delta\phi, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

com,

$$\phi_0 = \frac{-\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 + 4 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2}}{2 \cdot \alpha_2} \quad ; \quad \phi_n = \frac{\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 + 4 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2}}{2 \cdot \alpha_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{4ab - \sigma^2}{8} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot (a + \sigma \cdot u) \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{\Delta\phi}{2 \cdot \Delta t}$$

Δt ≡ **incremento associado à evolução da variável t:**

$$t_i = t_0 + i \cdot \Delta t, \qquad i = 0, 1, \ldots, m$$

com,

t_0 ≡ momento actual;

t_m ≡ data de vencimento da OCZ/DP subjacente.

2°) avaliação da opção

Tratando-se de uma opção de compra ("europeia" ou "americana") sobre uma OCZ/DP, o seu valor actual é calculado da seguinte forma:

i) em primeiro lugar, determina-se o seu valor na maturidade (momento "T"), através da condição

$$c_T = C_T = \max(B_T - X, 0);$$

ii) em seguida, prossegue-se através de um processo iterativo, até i = 0, mediante a utilização do modelo descrito anteriormente -fórmulas (200) a (205).

Se o objectivo for avaliar uma opção de venda "europeia" sobre uma OCZ/DP, há apenas que modificar a condição terminal para

$$p_T = \max(X - B_T, 0).$$

No caso de uma opção de venda "americana" sobre uma OCZ/DP é também necessário impor, em cada nó (i,j) da grelha de avaliação, a observância da seguinte condição de exercício antecipado:

$$P_{i,j} \geq X - B_{i,j}.$$

b) Avaliação de opções sobre obrigações de dívida pública com cupões

Para este tipo de opções a metodologia de avaliação é em tudo semelhante à descrita anteriormente, havendo apenas que proceder a uma ligeira alteração das expressões (200), (201) e (202), por forma a contemplar o pagamento contínuo, por parte da obrigação subjacente, de um cupão de "J":

$$\boldsymbol{B_{i,j} = \frac{1}{1 + \phi_j^2 \cdot \Delta t} \cdot \left[p_{j,j-1} \cdot B_{i+1,j-1} + p_{j,j} \cdot B_{i+1,j} + p_{j,j+1} \cdot B_{i+1,j+1} + J \cdot \Delta t \right]} \qquad (206)$$

$$\boldsymbol{j = 1, 2, \ldots, n-1}$$
$$\boldsymbol{i = 0, 1, \ldots, m}$$

$$B_{i,0} = \frac{1}{1+\phi_0^2 \cdot \Delta t} \cdot \left[p_{0,0} \cdot B_{i+1,0} + p_{0,1} \cdot B_{i+1,1} + p_{0,2} \cdot B_{i+1,2} + J \cdot \Delta t \right] \qquad i = 0,\ldots,m \tag{207}$$

$$B_{i,n} = \frac{1}{1+\phi_n^2 \cdot \Delta t} \cdot \left[p_{n,n-2} \cdot B_{i+1,n-2} + p_{n,n-1} \cdot B_{i+1,n-1} + p_{n,n} \cdot B_{i+1,n} + J \cdot \Delta t \right] \qquad i = 0,\ldots,m \tag{208}$$

3.3.3.3. Modelo de Courtadon

Georges Courtadon[276] desenvolveu um modelo de avaliação de opções sobre TDP/LP, mediante a sujeição da evolução das taxas de juro ao seguinte processo estocástico:

$$dr = a \cdot (b - r) \cdot dt + \sigma \cdot r \cdot dZ$$

sendo,

"b" (taxa de juro normal), "a" (velocidade de ajustamento da taxa de juro de curto prazo ao seu nível normal) e "σ" (desvio-padrão da taxa de juro de curto prazo) constantes positivas; e

"dZ" um *processo de Wiener*.

Com base no processo estocástico anterior[277], este autor concluiu que as equações diferenciais fundamentais, às quais deve obedecer o valor do TDP/LP subjacente - designado por D(r,t,T)[278]- e o valor -representado por $V_t(D,X,T)$[279]- de qualquer opção sobre TDP/LP (seja ela de compra ou de venda, de tipo "europeu" ou "americana), são as seguintes:

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot r^2 \cdot D_{rr} + \left[a \cdot (b - r) - \lambda \cdot \sigma \cdot r\right] \cdot D_r - r \cdot D + D_t + J = 0} \qquad (209)$$ [280]

sujeito a,

$$D(r, T_2, T_2) = 1$$

$$D(\infty, t, T_2) = 0$$

com, $T_2 \equiv$ data de vencimento do TDP/LP subjacente

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot r^2 \cdot V_{rr} + \left[a \cdot (b - r) - \lambda \cdot \sigma \cdot r\right] \cdot V_r - r \cdot V + V_t = 0} \qquad (210)$$

O que vai diferenciar o valor dos diversos tipos de opções sobre TDP/LP são as restrições impostas à equação diferencial (188):

---

[276] Courtadon, G., "The Pricing of Options on Default-Free Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. XVII, nº 1, 1982, pp. 75-100.

[277] E seguindo uma metodologia semelhante à descrita aquando da dedução da equação diferencial de Vasicek.

[278] Valor , no momento "t", de um TDP/LP com vencimento no período "T".

[279] Valor, no momento "t", de uma opção sobre um TDP/LP, com vencimento no período "T" e um preço de exercício de "X".

[280] "J" representa o cupão contínuo liberto pelo TDP/LP subjacente.

a) Opção de compra "europeia" $\equiv c_t(D, X, T)$:

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot r^2\cdot c_{rr}+\left[a\cdot(b-r)-\lambda\cdot\sigma\cdot r\right]\cdot c_r-r\cdot c+c_t=0 \tag{211}$$

sujeito a.

$$c_{T_1}(D, X, T_1)=\max\left[D(r, T_1, T_2)-X, 0\right]$$

$$\lim_{r\to+\infty} c_t(D, X, T_1)=0$$

com, $T_1 \equiv$ data de vencimento da opção.

b) Opção de venda "europeia" $\equiv p_t(D, X, T)$:

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot r^2\cdot p_{rr}+\left[a\cdot(b-r)-\lambda\cdot\sigma\cdot r\right]\cdot p_r-r\cdot p+p_t=0 \tag{212}$$

sujeito a,

$$p_{T_1}(D, X, T_1)=\max\left[X-D(r, T_1, T_2), 0\right]$$

$$\lim_{r\to+\infty} p_t(D, X, T_1)=0$$

c) Opção de compra "americana" $\equiv C_t(D, X, T)$:

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot r^2\cdot C_{rr}+\left[a\cdot(b-r)-\lambda\cdot\sigma\cdot r\right]\cdot C_r-r\cdot C+C_t=0 \tag{213}$$

sujeito a,

$$C_{T_1}(D, X, T_1)=\max\left[D(r, T_1, T_2)-X, 0\right]$$

$$\lim_{r\to+\infty} C_t(D, X, T_1)=0$$

$$C_t(D, X, T_1)=\max\left[D(r, t, T_2)-X, c_t\right]$$

d) Opções de venda "americanas" $\equiv P_t(D, X, T)$:

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot r^2\cdot P_{rr}+\left[a\cdot(b-r)-\lambda\cdot\sigma\cdot r\right]\cdot P_r-r\cdot P+P_t=0 \tag{214}$$

sujeito a,

$$P_{T_1}(D, X, T_1)=\max\left[X-D(r, T_1, T_2), 0\right]$$

$$\lim_{r\to+\infty} P_t(D, X, T_1)=X$$

$$P_t(D, X, T_1)=\max\left[X-D(r, t, T_2), p_t\right]$$

Infelizmente, nenhum dos quatro modelos anteriores possui solução analítica, apenas podendo ser resolvidos via recurso a métodos numéricos.

Courtadon[281] fornece um método geral de resolução dos quatro problemas anteriores, designado por "método de eliminação de Gauss"[282], tendo para o efeito que proceder à seguinte substituição:

$$s = \frac{1}{1+r} \qquad \text{com, } W(s,t) = V(D, X, T_1) = V(r,t).$$

Como

$$V_r = -s^2 \cdot W_s;$$

$$V_{rr} = 2s^3 \cdot W_s + s^4 \cdot W_{ss}; \text{ e}$$

$$V_t = W_t$$

então, a equação diferencial (210) passa a ser dada por:

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot s^2 \cdot (1-s)^2 \cdot W_{ss} + \left[\sigma^2 \cdot (1-s)^2 \cdot s - a \cdot b \cdot s^2 + (a - \lambda \cdot \sigma) \cdot (1-s) \cdot s\right] \cdot W_s - \left(\frac{1-s}{s}\right) \cdot W + W_t = 0} \quad (215)$$

Posto isto e tal como na transformação efectuada no modelo CIR por Hull e White, primeiro há que obter o valor da obrigação subjacente (através do método das diferenças finitas) para cada um dos pontos da grelha de avaliação. Em seguida (e através do método das diferenças finitas) obtém-se o valor da opção para cada um dos "nós" da grelha de avaliação.

[281] Courtadon, G., (1982), pp. 82-86.

[282] No fundo, trata-se de uma versão implícita do método das diferenças finitas.

3.3.3.4. Modelo de Rendleman e Bartter

Rendleman e Bartter[283] adoptaram uma metodologia de avaliação de opções sobre obrigações "em dois estados", mediante a sujeição dos movimentos estocásticos da taxa de juro de curto prazo ("r") -num cenário de neutralidade face ao risco- a um movimento geométrico browniano:

$$dr = (m - \lambda \cdot \sigma) \cdot r \cdot dt + \sigma \cdot r \cdot dZ$$

sendo,

m (taxa de crescimento esperada para "r"), λ (preço de mercado do prémio de risco da taxa de juro de curto prazo) e σ (volatilidade de "r") constantes; e dZ um *processo de Wiener*.

Conforme se irá verificar, trata-se de um modelo bastante mais simples do que os três anteriores, muito embora a aplicabilidade de um movimento geométrico browniano à evolução das taxas de juro seja algo duvidosa.

De qualquer modo, a metodologia proposta por estes dois autores obedece ao seguinte algoritmo:

1°) Determinar a estrutura temporal de taxas de juro de curto prazo

A este propósito, Rendleman e Bartter pressupõem que:

a) Em cada momento, a taxa de juro de curto prazo (isto é, a taxa de juro a um período)[284] pode apenas assumir um de dois valores, dado o valor assumido no período anterior, ou seja,

$$r_{i+1} = \begin{cases} r_{i+1}^{u} \\ r_{i+1}^{d} \end{cases} \qquad \text{com, } i = 1, \ldots, n-1: \quad t_{i+1} = t_1 + i \cdot \Delta t$$

sendo,

t_1 ≡ data de avaliação;

t_n ≡ data de vencimento da obrigação subjacente à opção; e

Δt ≡ período de tempo considerado.

Tal significa que, no período "i+1", a taxa de juro de curto prazo ou sobe para r_{i+1}^{u}, assumindo o estado "u"[285], ou então desce para r_{i+1}^{d}, assumindo o estado "d"[286]. Daí o facto de este método ser designado por "avaliação em dois estados".

[283] Rendleman, R. J., e B. J. Bartter, "The Pricing of Options on Debt Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. XV, n° 1, 1980, pp. 11-24.

[284] Correspondente à "yield to maturity" da OCZ/DP com maturidade igual a um período de tempo.

[285] Upper.

[286] Down.

b) O rácio das taxas de juro de curto prazo, para dois períodos de tempo consecutivos, é constante para ambos os estados considerados, isto é,

sendo,

z_u ≡ rácio das taxas de juro de curto prazo entre dois períodos consecutivos, para o estado "u"; e

z_d ≡ rácio das taxas de juro de curto prazo entre dois períodos consecutivos, para o estado "d".

então,

$$r_{i+1} = \begin{cases} r_{i+1}^{u} = z_u \cdot r_i \\ r_{i+1}^{d} = z_d \cdot r_i \end{cases} \qquad \text{com, } i = 1,\ldots,n-1: \quad t_{i+1} = t_1 + i \cdot \Delta t$$

c) As probabilidades de ocorrência dos dois estados permanecem constantes ao longo do tempo, sendo

θ ≡ probabilidade de ocorrência do estado "u"; e
1 - θ ≡ probabilidade de ocorrência do estado "d".

Portanto,

$$r_{i+1} = \begin{cases} z_u \cdot r_i & \text{com probabilidade } \theta \\ z_d \cdot r_i & \text{com probabilidade } 1 - \theta \end{cases} \qquad \text{em que, } i = 1,\ldots,n-1: \quad t_{i+1} = t_1 + i \cdot \Delta t$$

Atendendo aos pressupostos enunciados, a determinação da estrutura temporal de taxas de juro de curto prazo é feita do seguinte modo:

1.1) A taxa de juro actual (spot) de curto prazo (ou seja, a taxa "r_1") corresponde à "yield to maturity" de uma OCZ/DP com maturidade igual a um período de tempo;

1.2) As taxas de juro de curto prazo dos períodos de tempo seguintes (taxas forward) são obtidas com base na seguinte fórmula de recorrência:

$$\boxed{\begin{aligned} & r_{i,j} = r_1 \cdot z_u^{j-1} \cdot z_d^{i-j} \\ & \qquad\qquad\qquad i = 2,3,\ldots,n \\ & \qquad\qquad\qquad j = 1,2,\ldots,i \end{aligned}} \qquad (216)$$

sendo,

j ≡ número de subidas registado pelas taxas de juro de curto prazo até ao período "t_i"; e

$r_{i,j}$ ≡ conjunto de taxas de juro de curto prazo admissível para o período "t_i".

Na verdade, a prossecução das etapas 1.1 e 1.2 equivale à construção de uma "grelha" de taxas de juro de curto prazo:

$$
\begin{array}{cccccc}
t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_i & t_{i+1} \\
\hline
 & & z_u^2 \cdot r_1 & & & \\
 & z_u \cdot r_1 \; \langle & & & & r_{i+1,j+1} = z_u \cdot r_{i,j} = r_1 \cdot z_u^j \cdot z_d^{(i+1)-(j+1)} \\
r_1 \; \langle & & z_u \cdot z_d \cdot r_1 & \cdots & r_{i,j} \; \langle & \\
 & z_d \cdot r_1 \; \langle & & & & r_{i+1,j} = z_d \cdot r_{i,j} = r_1 \cdot z_u^{j-1} \cdot z_d^{(i+1)-j} \\
 & & z_d^2 \cdot r_1 & & &
\end{array}
$$

Todavia, a construção de tal "grelha" requer o conhecimento prévio de "z_u", "z_d" e "θ". Ora, estes parâmetros podem ser obtidos com base nas três expressões seguintes[287]

$$z_u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} \tag{207}$$

$$z_d = e^{-\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} \tag{218}$$

$$\theta = \frac{e^{(m-\lambda \cdot \sigma) \cdot \Delta t} - e^{-\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}} \tag{219}$$

pelo que, no fundo, o modelo de Rendleman e Bartter requer somente a estimação de dois parâmetros, a saber: "$(m - \lambda \cdot \sigma)$" e "σ"[288].

Com efeito, como

$$dr = (m - \lambda \cdot \sigma) \cdot r \cdot dt + \sigma \cdot r \cdot dZ \qquad \text{com } dZ \cap N\left(0, \sqrt{dt}\right),$$

aplicando o *Lema de ITO* à transformação $G(r,t) = \ln r$ vem

---

[287] Vide Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Prentice-Hall International Editions, pp. 268.

[288] Para o efeito, poder-se-á:

1º) arbitrar valores;

2º) aplicar o modelo;

3º) comparar os valores estimados para a obrigação subjacente e para a opção com os seus preços de mercado;

4º) corrigir os valores dos parâmetros e repetir os passos (2) e (3) até que os valores estimados pelo modelo coincidam com os preços de mercado.

$$\ln\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right)=\left[(m-\lambda\cdot\sigma)-\sigma^2/2\right]\cdot dt+\sigma\cdot dZ,$$

pelo que

$$E\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right)=e^{(m-\lambda\cdot\sigma)\cdot dt} \quad \text{e} \quad VAR\left(\frac{r_{t+dt}}{r_t}\right)=e^{2(m-\lambda\cdot\sigma)\cdot dt}\cdot\left(e^{\sigma^2\cdot dt}-1\right).$$

Por seu turno, a aplicação das fórmulas (217), (218) e (219) permite validar a condição

$$\theta\cdot z_u+(1-\theta)\cdot z_d=e^{(m-\lambda\cdot\sigma)\cdot\Delta t}.$$

Todavia, tais fórmulas não asseguram a convergência do segundo momento das duas distribuições, isto é, nada garante que

$$\left[\theta\cdot z_u^2+(1-\theta)\cdot z_d^2\right]-\left[e^{(m-\lambda\cdot\sigma)\cdot\Delta t}\right]^2=e^{2(m-\lambda\cdot\sigma)\cdot\Delta t}\cdot\left(e^{\sigma^2\cdot\Delta t}-1\right)...$$

2º) Determinar a "grelha" de preços futuros da obrigação subjacente à opção[289]

Tal é facilmente conseguido mediante a aplicação da seguinte metodologia:

2.1) Começa-se por considerar o valor da obrigação subjacente na sua maturidade, onde

$$\boxed{\boldsymbol{D_{n,j}=Vn} \qquad \boldsymbol{j=1,\ldots,n}} \tag{220}$$

sendo,

$D_{i,j}$ ≡ valor da obrigação subjacente, no período "t_i" ($j=1,\ldots,i$); e

Vn ≡ valor nominal[290] da obrigação subjacente.

2.2) E prossegue-se, até à data de avaliação, por ordem cronológica inversa e através do processo iterativo dado pela fórmula seguinte:

$$\boxed{\begin{array}{r}\boldsymbol{D_{i,j}=e^{-r_{i,j}\cdot\Delta t}\cdot\left[\theta\cdot D_{i+1,j+1}+(1-\theta)\cdot D_{i+1,j}+CF_{i+1}\right]}\\ \boldsymbol{i=1,2,\ldots,n-1}\\ \boldsymbol{j=1,2,\ldots,i}\end{array}} \tag{221}$$

sendo,

CF_{i+1} ≡ cash flow gerado pela obrigação subjacente, no período "t_{i+1}".

[289] Isto é, calcular o valor da obrigação subjacente em cada "nó" da "árvore" de taxas de juro de curto prazo.

[290] Ou parcela do valor nominal a reembolsar, caso o reembolso da obrigação, por dedução ao valor nominal, não seja integralmente feito na sua data de vencimento.

3º) Determinar o valor da opção

Mais uma vez,

3.1) Começa-se por determinar o valor da opção na maturidade desta, o qual corresponde ao seu *valor intrínseco.*

3.1.1) Opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$c_{n^*,j} = C_{n^*,j} = \max\left(D_{n^*,j} - X, 0\right) \qquad j = 1,\ldots,n^* \tag{222}$$

sendo,

$t_{n^*} \equiv$ data de vencimento da opção; e
X ≡ preço de exercicio da opção.

3.1.2) Opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$p_{n^*,j} = P_{n^*,j} = \max\left(X - D_{n^*,j}, 0\right) \qquad j = 1,\ldots,n^* \tag{223}$$

3.2) E prossegue-se, até à data de avaliação (momento "t_1"), por ordem cronológica inversa e comparando, em cada momento, o valor associado ao modelo com o valor de exercício da opção[291].

3.2.1) Opções "europeias"

3.2.1.1) Opções de compra

$$c_{i,j} = \max\left\{0, e^{-r_{i,j}\cdot\Delta t}\cdot\left[\theta\cdot c_{i+1,j+1} + (1-\theta)\cdot c_{i+1,j}\right]\right\} \qquad i = 1,2,\ldots,n^*-1 \quad j = 1,2,\ldots,i \tag{224}$$

[291] Ou seja, o lucro resultante do exercicio imediato da opção.

3.2.1.2) Opções de venda

$$p_{i,j} = \max\left\{0, e^{-r_{i,j}\cdot\Delta t}\cdot\left[\theta\cdot p_{i+1,j+1} + (1-\theta)\cdot p_{i+1,j}\right]\right\}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n^* - 1$$

$$j = 1, 2, \ldots, i \qquad (225)$$

3.2.2) Opções "americanas"

3.2.2.1) Opções de compra

$$C_{i,j} = \max\{D_{i,j} - X, e^{-r_{i,j}\cdot\Delta t}\cdot\left[\theta\cdot C_{i+1,j+1} + (1-\theta)\cdot C_{i+1,j}\right]$$

$$i = 1, 2, \ldots, n^* - 1$$

$$j = 1, 2, \ldots, i \qquad (226)$$

3.2.2.2) Opções de venda

$$P_{i,j} = \max\left\{X - D_{i,j}, e^{-r_{i,j}\cdot\Delta t}\cdot\left[\theta\cdot P_{i+1,j+1} + (1-\theta)\cdot P_{i+1,j}\right]\right\}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n^* - 1$$

$$j = 1, 2, \ldots, i \qquad (227)$$

3.3.3.5. Modelo de Ho e Lee ("Modelo AR"[292])

3.3.3.5.1. Pressupostos

O modelo de avaliação de opções sobre obrigações de Ho e Lee[293] assenta nas seguintes premissas:

i) Não existem custos de transacção e todos os activos são perfeitamente divisíveis;

ii) A vida da obrigação subjacente à opção é subdividida em "n" subintervalos de tempo com uma duração "Δt", isto é,

$$\boxed{t_i = t_0 + i \cdot \Delta t, \qquad i = 0, 1, \ldots, n}$$

sendo,

$t_0 \equiv$ data de avaliação; e

$t_n \equiv$ data de vencimento da obrigação subjacente à opção.

iii) O mercado de obrigações é completo, ou seja, existe uma "obrigação de cupão zero" para qualquer maturidade "k"[294], sendo

$$\boxed{k = 0, 1, \ldots, n}$$

iv) Em cada período de tempo "t_i" existe um número finito "j" de "estados do mundo", tal que

$$\boxed{j = 0, 1, \ldots, i}$$

v) "$D_{i,j}(k)$" representa o valor, no período "t_i" e para o "estado" "j", de uma obrigação de cupão zero com um valor nominal unitário e com um tempo em falta para a maturidade de "$k \cdot \Delta t$" períodos (com $k = 0, 1, \ldots, n$)[295], sendo designado por *função de desconto*. Cada *função de desconto* descreve completamente a estrutura temporal de taxas de juro vigente em cada período e para cada "estado", devendo para o efeito obedecer às seguintes condições:

---

[292] Arbitrage-free interest rate movement model.

[293] Ho, T. S. Y., e S. Lee, "Term Structure and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *The Journal of Finance*, vol. XLI, nº 5, 1986, pp. 1011-29.

[294] Bem como para qualquer classe de risco. De qualquer forma, como a análise está focalizada nas opções sobre TDP/LP, então está implícita a consideração da classe de "risco zero" (obrigações emitidas pelo Estado).

[295] Isto é, com vencimento no período "t_k".

v1) $D_{i,j}(k) \geq 0$[296], com

$$i = 0, 1, \ldots, n$$
$$j = 0, 1, \ldots, i$$
$$k = 0, 1, \ldots, n$$

v2) $D_{i,j}(0) = 1$[297], com

$$i = 0, 1, \ldots, n$$
$$j = 0, 1, \ldots, i$$

v3) $\lim_{k \to +\infty} D_{i,j}(k) = 0$[298], com

$$i = 0, 1, \ldots, n$$
$$j = 0, 1, \ldots, i$$

vi) A evolução de toda a estrutura a prazo das taxas de juro (ou seja, das funções de desconto) obedece a um processo binomial. Assim, no momento de avaliação (t_0) a estrutura temporal de taxas de juro -$D_{0,0}(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$- é conhecida[299]. No período seguinte, poderão vigorar duas estruturas temporais de taxas de juro diferentes: uma com probabilidade de ocorrência "π" e outra com probabilidade de ocorrência "$1 - \pi$"[300]. Decorrido mais um período, cada uma destas duas estruturas pode dar origem a mais duas estruturas temporais de taxas de juro, e assim sucessivamente.

Ora, para que a evolução da estrutura a prazo de taxas de juro obedeça a uma "grelha" binomial, Ho e Lee tiveram de restringir tais movimentações assumindo que as funções de desconto apenas dependem do número de movimentos num determinado sentido e não da sequência em que esses mesmos movimentos ocorrem[301]. Deste modo, para cada período de tempo (t_i), para cada "estado" (j) e para cada maturidade (k), a estrutura temporal de taxas de juro -$D_{i,j}(k)$- pode, no período de tempo seguinte, dar origem a duas estruturas temporais, a saber:

---

[296] O valor de uma "obrigação de cupão zero" nunca poderá ser negativo.
[297] Na data de vencimento, o valor de uma "obrigação de cupão zero" corresponde ao seu valor nominal (neste caso e por hipótese, unitário).
[298] O valor actual de uma "obrigação de cupão zero" perpétua é nulo.
[299] Desde que se verifique o pressuposto (iii).
[300] "π" é designada por *probabilidade binomial implícita*.
[301] Isto é, um movimento em sentido "positivo" seguido por um movimento em sentido "negativo" produz sempre igual efeito sobre a estrutura a prazo das taxas de juro do que um movimento em sentido "negativo" seguido por um movimento em sentido "positivo", quaisquer que sejam as noções de "positivo" ou "negativo".

$$\boxed{D_{i,j}(k)\left\langle \begin{array}{ll} D_{i+1,j+1}(k) & \text{com probabilidade } \pi \\ D_{i+1,j}(k) & \text{com probabilidade } 1-\pi \end{array}\right.}$$

Repetindo iterativamente o raciocínio anterior é então possível construir uma "árvore" de estruturas temporais de taxas de juro:

$$\boxed{\begin{array}{llll} & & D_{2,2}(k) & \\ & D_{1,1}(k)\langle & & \\ & & D_{2,1}(k) & \\ D_{0,0}(k)\langle & D_{1,0}(k)\langle & & \ldots \\ & & D_{2,0}(k) & \end{array}}$$

Em suma, Ho e Lee modelizam a evolução da estrutura temporal de taxas de juro no seu conjunto e não os movimentos de uma única variável[302].

3.3.3.5.2. Funções de perturbação: h(k) e h*(k)

Para modelizar a evolução da estrutura temporal de taxas de juro, a questão reside em saber como obter "$D_{i+1,j+1}(k)$" e "$D_{i+1,j}(k)$" a partir de "$D_{i,j}(k)$". Determinando-se tais fórmulas de recorrência, tornar-se-à fácil descrever a evolução da estrutura temporal de taxas de juro, pois bastará partir do conhecimento detido sobre "$D_{0,0}(k)$".

Com esse objectivo, designe-se por "$F_{i,j}(k)$" a *função de desconto a prazo implícita* na estrutura temporal de taxas de juro vigente, isto é, seja

$$\boxed{F_{i,j}(k)=\frac{D_{i,j}(k+1)}{D_{i,j}(1)}}$$

Caso a estrutura temporal de taxas de juro estivesse sujeita a movimentos determinísticos, então as duas funções de desconto do período seguinte teriam de ser iguais entre si e idênticas à função de desconto a prazo implícita à estrutura temporal de taxas de juro em vigor no momento actual, para um determinado "estado", isto é,

[302] Ao contrário do que acontece, por exemplo no modelo de Rendleman e Bartter.

$$\begin{cases} D_{i+1,j+1}(k) = F_{i,j}(k) = \dfrac{D_{i,j}(k+1)}{D_{i,j}(1)} \\ D_{i+1,j}(k) = F_{i,j}(k) = \dfrac{D_{i,j}(k+1)}{D_{i,j}(1)} \end{cases}$$

No entanto, a estrutura temporal de taxas de juro encontra-se sujeita a perturbações estocásticas, pelo que não é possível garantir a verificação das duas condições anteriores. Assim, sendo

h(k) ≡ desvio entre a função de desconto e a função a prazo implícita, caso ocorra uma perturbação estocástica "positiva" (com probabilidade "π"); e

h*(k) ≡ desvio entre a função de desconto e a função de desconto a prazo implícita, caso ocorra uma perturbação estocástica "negativa" (com probabilidade "1-π")

então, e de forma a evitar a existência de oportunidades de arbitragem, ter-se-ão de verificar as seguintes igualdades:

$$\boxed{\begin{cases} D_{i+1,j+1}(k) = \dfrac{D_{i,j}(k+1)}{D_{i,j}(1)} \cdot h(k) \\ D_{i+1,j}(k) = \dfrac{D_{i,j}(k+1)}{D_{i,j}(1)} \cdot h^*(k) \end{cases}}$$

Consequentemente, para modelizar a evolução da estrutura temporal de taxas de juro basta agora definir as designadas *funções de perturbação*: h(k) e h*(k).

Ora, facilmente se demonstra que as funções de perturbação têm de obedecer às seguintes condições:

1) $\begin{cases} h(k) > 0 \\ h^*(k) > 0 \end{cases}, \quad k = 0, 1, \ldots, n;$[303]

2) $h(0) = h^*(0) = 1;$[304] e

3) $\pi \cdot h(k) + (1-\pi) \cdot h^*(k) = 1 , \quad k = 0, 1, \ldots, n.$[305]

[303]Por força do pressuposto (v).
[304]Idem.
[305]Caso contrário existiriam oportunidades de arbitragem, conforme demonstrado no artigo Ho, T. S. Y., e S. Lee (1986), pp. 1026-7.

Por outro lado, considere-se a função de desconto "$D_{i,j}(k)$" e simulem-se duas hipóteses de evolução da estrutura temporal de taxas de juro:

Hipótese I) Ocorrência de um movimento "positivo" seguido de um movimento "negativo", ou seja,

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & D_{i+1,j+1}(k) & \\ D_{i,j}(k)\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots\ D_{i+2,j+1}(k) \end{array}}$$

Neste caso,

$$D_{i+2,j+1}(k) = \frac{D_{i+1,j+1}(k+1)}{D_{i+1,j+1}(1)} \cdot h^*(k)$$

$$\Downarrow \quad D_{i+1,j+1}(k+1) = \frac{D_{i,j}(k+2)}{D_{i,j}(1)} \cdot h(k+1)$$

$$D_{i+2,j+1}(k) = \frac{D_{i,j}(k+2)}{D_{i,j}(1) \cdot D_{i+1,j+1}(1)} \cdot h(k+1) \cdot h^*(k)$$

$$\Downarrow \quad D_{i+1,j+1}(1) = \frac{D_{i,j}(2)}{D_{i,j}(1)} \cdot h(1)$$

$$D_{i+2,j+1}(k) = \frac{D_{i,j}(k+2)}{D_{i,j}(2)} \cdot \frac{h(k+1) \cdot h^*(k)}{h(1)}$$

Hipótese II) Ocorrência de um movimento "negativo" seguido por um movimento "positivo", isto é,

$$\boxed{\begin{array}{ccc} D_{i,j}(k) & & D_{i+2,j+1}(k) \\ & \ddots\ D_{i+1,j}(k)\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \end{array}}$$

Nesta hipótese,

$$D_{i+2,j+1}(k) = \frac{D_{i+1,j}(k+1)}{D_{i+1,j}(1)} \cdot h(k)$$

$$\Downarrow \quad D_{i+1,j}(k+1) = \frac{D_{i,j}(k+2)}{D_{i,j}(1)} \cdot h^*(k+1)$$

$$D_{i+2,j+1}(k) = \frac{D_{i,j}(k+2)}{D_{i,j}(1)\cdot D_{i+1,j}(1)}\cdot h^*(k+1)\cdot h(k)$$

$$\Downarrow \quad D_{i+1,j}(1) = \frac{D_{i,j}(2)}{D_{i,j}(1)}\cdot h^*(1)$$

$$D_{i+2,j+1}(k) = \frac{D_{i,j}(k+2)}{D_{i,j}(2)}\cdot\frac{h^*(k+1)\cdot h(k)}{h^*(1)}$$

Mas, como as funções de desconto dependem, não da sequência em que ocorrem os movimentos sobre a estrutura temporal de taxas de juro, mas apenas do número de movimentos verificado em determinado sentido, então

$$\frac{D_{i,j}(k+2)}{D_{i,j}(2)}\cdot\frac{h(k+1)\cdot h^*(k)}{h(1)} = \frac{D_{i,j}(k+2)}{D_{i,j}(2)}\cdot\frac{h^*(k+1)\cdot h(k)}{h^*(1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(k+1)\cdot h^*(k)\cdot h^*(1) = h^*(k+1)\cdot h(k)\cdot h(1)$$

$$\Downarrow \quad h^*(k) = \frac{1-\pi\cdot h(k)}{1-\pi} \ , \quad k = 0,1,\ldots,n$$ [306]

$$h(k+1)\cdot\frac{1-\pi\cdot h(k)}{1-\pi}\cdot\frac{1-\pi\cdot h(1)}{1-\pi} = \frac{1-\pi\cdot h(k+1)}{1-\pi}\cdot h(k)\cdot h(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(k+1)\cdot\left\{\left[1-\pi\cdot h(k)\right]\cdot\left[1-\pi\cdot h(1)\right]+\pi\cdot(1-\pi)\cdot h(1)\cdot h(k)\right\} = (1-\pi)\cdot h(1)\cdot h(k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h(k+1)} = \frac{1-\pi\cdot h(1)}{(1-\pi)\cdot h(1)\cdot h(k)} + \frac{\pi\cdot h(k)\cdot\left[h(1)-1\right]}{(1-\pi)\cdot h(1)\cdot h(k)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h(k+1)} = \frac{\delta}{h(k)} + \gamma \ , \quad k \geq 1$$

sendo,

$$\delta = \frac{1-\pi\cdot h(1)}{(1-\pi)\cdot h(1)} \qquad \text{e} \qquad \gamma = \frac{\pi-\left[h(1)-1\right]}{(1-\pi)\cdot h(1)}$$

---

[306] Pois, $\pi\cdot h(k)+(1-\pi)\cdot h^*(k) = 1$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Ora, a equação anterior não é mais do que uma equação diferencial de primeira ordem, cuja solução geral é dada por

$$h(k) = \frac{1}{\pi + \alpha \cdot \delta^k}, \text{ sendo "}\alpha\text{" uma constante.}$$

Todavia, a sujeição da solução geral à condição "$h(0) = 1$" determina que "$\alpha = 1 - \pi$" e portanto gera a seguinte solução única:

$$\boxed{h(k) = \frac{1}{\pi + (1-\pi) \cdot \delta^k}}$$

Por outro lado, tendo em conta que $\pi \cdot h(k) + (1-\pi) \cdot h^*(k) = 1$, obtém-se:

$$\frac{\pi}{\pi + (1-\pi) \cdot \delta^k} + (1-\pi) \cdot h^*(k) = 1 \Leftrightarrow h^*(k) = \frac{\pi + (1-\pi) \cdot \delta^k - \pi}{(1-\pi) \cdot \left[\pi + (1-\pi) \cdot \delta^k\right]} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{h^*(k) = \frac{\delta^k}{\pi + (1-\pi) \cdot \delta^k}}$$

Concluindo, para modelizar a evolução da estrutura temporal das taxas de juro basta apenas estimar os parâmetros "π" e "δ".

3.3.3.5.3. Algoritmo de aplicação do "Modelo AR"

A determinação do valor de uma opção sobre uma obrigação através do modelo de Ho e Lee envolve a realização das seguintes etapas de resolução:

1º) Modelizar a evolução da estrutura temporal de taxas de juro.

1.1) Determinar $D_{0,0}(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

A estrutura temporal de taxas de juro no momento de avaliação (t_0) é conhecida e corresponde ao preço, nesse momento, de obrigações de cupão zero com valor nominal unitário e maturidades $0 \cdot \Delta t, 1 \cdot \Delta t, \ldots, n \cdot \Delta t$.

1.2) Determinar $D_{i,j}(k)$

$$i = 1,\ldots,n$$
$$j = 0,1,\ldots,i$$
$$k = 0,1,\ldots,n-i$$

Para isso.

1.2.1) Estimar os parâmetros "π" e "δ".

Tal é feito mediante a obtenção de estimativas para "π" e "δ" que façam com que os valores determinados pelo "modelo AR" para um qualquer activo transaccionável e dependente da taxa de juro coincida com os respectivos preços de mercado. Para isso, há que simular repetidamente a aplicação do "modelo AR" e, simultaneamente, ajustar continuamente as estimativas de "π" e " δ", até que a convergência para os valores de mercado seja atingida. Quando tal acontece, então as estimativas de "π" e "δ" poderão ser utilizadas para avaliar qualquer outro activo dependente da taxa de juro, através do "modelo AR".[307]

1.2.2) Determinar as *funções de perturbação.*

$$h(k) = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\cdot\delta^{k}} \qquad (228)$$

$$k = 0,1,\ldots,n$$

$$h^{*}(k) = \frac{\delta^{k}}{\pi + (1-\pi)\cdot\delta^{k}} \qquad (229)$$

[307]Trata-se, no fundo, de utilizar o método de estimação descrito no pé-de-página 288, a propósito dos parâmetros do modelo de Rendleman e Bartter.

1.2.3) Utilizar as fórmulas de recorrência (230) e (231).

$$D_{i+1,j+1}(k) = \frac{D_{i,j}(k+1)}{D_{i,j}(1)} \cdot h(k) \qquad (230)$$

$$i = 0,\ldots,n-1$$
$$j = 0,1,\ldots,i$$
$$k = 0,1,\ldots,n-i-1$$

$$D_{i+1,j}(k) = \frac{D_{i,j}(k+1)}{D_{i,j}(1)} \cdot h^*(k) \qquad (231)$$

2°) Determinar a "grelha binomial" de preços futuros da obrigação subjacente à opção.

2.1) Começa-se por considerar o valor da obrigação na sua data de vencimento, onde

$$B_{n,j} = D_{n,j}(0) \cdot Vn = Vn \qquad (232)$$

sendo,

$B_{i,j}$ ≡ valor da obrigação subjacente no período "t_i" e para o "estado" "j"; e

Vn ≡ valor nominal da obrigação subjacente.

2.2) E prossegue-se até à data de avaliação (período t_0), por ordem cronológica inversa e através do processo iterativo dado pela fórmula (233).

$$B_{i,j} = D_{i,j}(1) \cdot \left[\pi \cdot B_{i+1,j+1} + (1-\pi) \cdot B_{i+1,j} + CF_{i+1}\right] \qquad (233)$$

$$i = 0,1,\ldots,n-1$$
$$j = 0,1,\ldots,i$$

sendo,

CF_{i+1} ≡ cash flow gerado pela obrigação subjacente, no período "t_{i+1}".

3º) Determinar o valor da opção.

3.1) Começa-se por calcular o valor da opção na sua maturidade, o qual corresponde ao seu *valor intrínseco*.

3.1.1) Opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$c_{n^*,j} = C_{n^*,j} = \max\left(B_{n^*,j} - X, 0\right) \qquad j = 0, 1, \ldots, n^* \tag{234}$$

sendo,

$c_{i,j}$ ≡ valor de uma opção de compra "europeia", no período "t_i" e para o "estado" "j";

$C_{i,j}$ ≡ valor de uma opção de compra "americana", no período "t_i" e para o "estado" "j";

t_{n^*} ≡ data de vencimento da opção; e

X ≡ preço de exercício da opção.

3.1.2) Opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$p_{n^*,j} = P_{n^*,j} = \max\left(X - B_{n^*,j}, 0\right) \qquad j = 0, 1, \ldots, n^* \tag{235}$$

sendo,

$p_{i,j}$ ≡ valor de uma opção de venda "europeia", no período "t_i" e para o "estado" "j"; e

$P_{i,j}$ ≡ valor de uma opção de venda "americana", no período "t_i" e para o "estado" "j";

3.2) E prossegue-se até à data de avaliação, por ordem cronológica inversa e comparando, em cada momento, o valor estimado pelo modelo para a opção com o valor de exercício do contrato.

3.2.1) Opções "europeias"

3.2.1.1) Opções de compra

$$c_{i,j} = \max\left\{0, D_{i,j}(1) \cdot \left[\pi \cdot c_{i+1,j+1} + (1 - \pi) \cdot c_{i+1,j}\right]\right\} \qquad i = 0, 1, \ldots, n^* - 1 \quad j = 0, 1, \ldots, i \tag{236}$$

3.2.1.2) Opções de venda

$$p_{i,j} = \max\left\{0, D_{i,j}(1)\cdot\left[\pi\cdot p_{i+1,j+1} + (1-\pi)\cdot p_{i+1,j}\right]\right\} \qquad i = 0,1,\ldots,n^*-1 \quad j = 0,1,\ldots,i \tag{237}$$

3.2.2) Opções "americanas"

3.2.2.1) Opções de compra

$$C_{i,j} = \max\left\{B_{i,j} - X, D_{i,j}(1)\cdot\left[\pi\cdot C_{i+1,j+1} + (1-\pi)\cdot C_{i+1,j}\right]\right\} \qquad i = 0,1,\ldots,n^*-1 \quad j = 0,1,\ldots,i \tag{238}$$

3.2.1.2) Opções de venda

$$P_{i,j} = \max\left\{X - B_{i,j}, D_{i,j}(1)\cdot\left[\pi\cdot P_{i+1,j+1} + (1-\pi)\cdot P_{i+1,j}\right]\right\} \qquad i = 0,1,\ldots,n^*-1 \quad j = 0,1,\ldots,i \tag{239}$$

Note-se que quando o objectivo consiste em avaliar uma opção sobre uma "obrigação de cupão zero", de valor nominal "Vn" e maturidade "t_n", a metodologia anteriormente exposta revela-se extremamente expedita. Isto porque, uma vez modelizada a evolução da estrutura temporal das taxas de juro (1° passo do algoritmo apresentado) pode-se, de imediato, proceder à avaliação da própria opção, ou seja:

i) Determina-se o valor da opção na sua maturidade

i1) Opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$\boxed{c_{n^*,j} = C_{n^*,j} = \max\left[Vn\cdot D_{n^*,j}(n-n^*) - X, 0\right], \quad j = 0,1,\ldots,n^*}$$

i2) Opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$\boxed{p_{n^*,j} = P_{n^*,j} = \max\left[X - Vn \cdot D_{n^*,j}(n - n^*), 0\right], \quad j = 0, 1, \ldots, n^*}$$

ii) E de seguida, prossegue-se até à data de avaliação, por ordem cronológica inversa e comparando, em cada momento, o valor estimado pelo modelo com o valor de exercício da opção.

ii.1) Opções "europeias"

ii.1.1) Opções de compra

$$\boxed{c_{i,j} = \max\left\{0, D_{i,j}(1) \cdot \left[\pi \cdot c_{i+1,j+1} + (1-\pi) \cdot c_{i+1,j}\right]\right\}, \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, n^* - 1 \\ j = 0, 1, \ldots, i \end{array}}$$

ii.1.2) Opções de venda

$$\boxed{p_{i,j} = \max\left\{0, D_{i,j}(1) \cdot \left[\pi \cdot p_{i+1,j+1} + (1-\pi) \cdot p_{i+1,j}\right]\right\}, \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, n^* - 1 \\ j = 0, 1, \ldots, i \end{array}}$$

ii.2) Opções "americanas"

ii.1.1) Opções de compra

$$\boxed{C_{i,j} = \max\left\{Vn \cdot D_{i,j}(n-i) - X, D_{i,j}(1) \cdot \left[\pi \cdot C_{i+1,j+1} + (1-\pi) \cdot C_{i+1,j}\right]\right\}, \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, n^* - 1 \\ j = 0, 1, \ldots, i \end{array}}$$

ii.1.2) Opções de venda

$$\boxed{P_{i,j} = \max\left\{X - Vn \cdot D_{i,j}(n-i), D_{i,j}(1) \cdot \left[\pi \cdot P_{i+1,j+1} + (1-\pi) \cdot P_{i+1,j}\right]\right\}, \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, n^* - 1 \\ j = 0, 1, \ldots, i \end{array}}$$

Em síntese, o "modelo AR" permite avaliar activos dependentes da taxa de juro em função da evolução estimada para a estrutura temporal de taxas de juro. Portanto, a questão essencial consiste em modelizar a evolução da estrutura a prazo de taxas de juro, o que é feito de forma a garantir que os movimentos estocásticos dessa mesma estrutura não acarretem oportunidades de arbitragem.[308]

[308] Dai o facto de se atribui a este modelo a designação de "AR".

Por outro lado, este modelo é também um modelo unifactorial, no sentido em que qualquer activo dependente da taxa de juro é avaliado em função da taxa de juro de curto prazo (isto é, a um período) prevalecente - $D_{i,j}(1)$.

Concluindo, trata-se de um modelo interessante na medida em que, não só requer a estimação de apenas dois parâmetros ("π" e "δ") como também incorpora a informação associada à corrente estrutura temporal de taxas de juro - $D_{0,0}(k)$. Todavia, o "modelo AR" pressupõe que a volatilidade é igual para todas as taxas de juro, o que na realidade tende a ser contrariado pela evidência empírica.[309]

[309] Com efeito, geralmente as taxas de juro de curto prazo são mais voláteis do que as taxas de juro de longo prazo.

3.3.3.6. Modelo de Black, Derman e Toy

3.3.3.6.1. Pressupostos

Black, Derman e Toy[310] desenvolveram um modelo unifactorial de avaliação de opções sobre TDP/LP, em que, tal como no modelo de Ho e Lee, a única variável de "estado" é a taxa de juro de curto prazo (isto é, a taxa de juro a um período de tempo[311]) e que se baseia na estrutura temporal de taxas de juro correntemente em vigor no mercado. Contudo e ao contrário do que sucedia no modelo analisado anteriormente, o modelo de Black, Derman e Toy entra em linha de conta com o facto de a volatilidade das taxas de juro não ser constante ao longo do espectro de maturidades considerado.

A dedução do modelo de Black, Derman e Toy ir-se-à basear nas seguintes premissas:

i) O rendimento esperado, por período de tempo, é igual para todos os activos;

ii) As alterações das taxas de rentabilidade efectivas[312] de todas as obrigações estão perfeitamente correlacionadas;

iii) As taxas de juro de curto prazo possuem uma distribuição lognormal e evoluem de acordo com um processo binomial (com uma probabilidade implícita de 1/2);[313] e

iv) Não existem custos de transacção.

3.3.3.6.2. Algoritmo de aplicação do modelo de Black, Derman e Toy

A avaliação de uma opção sobre TDP/LP através do modelo em estudo passa pela execução das seguintes etapas:

1°) Determinar a "grelha" de taxas de juro futuras de curto prazo.

As taxas de juro futuras de curto prazo são determinadas em perfeita consonância com a estrutura temporal de taxas de juro vigente no mercado, isto é, obedecendo às taxas de

[310] Black, F., E. Derman e W. Toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, Janeiro-Fevereiro de 1990, pp. 33-9.
[311] Por exemplo, a taxa de juro a um ano.
[312] Isto é, das "yield to maturity" ou, abreviadamente, "YTM".
[313] Conforme demonstrado no quesito 3.2.2.2.6, as duas premissas são perfeitamente conciliáveis.

rentabilidade efectivas geradas pelas "obrigações de cupão zero de dívida pública" (OCZ/DP) para os diversos prazos e à volatilidade dessas mesmas "YTM's".

Assim, sendo

$Y(k) \equiv$ YTM das OCZ/DP com vencimento dentro de "k" períodos:

$$D(k) = \frac{Vn}{\left[1 + Y(k)\right]^k}$$

com,

$D(k) \equiv$ preço de mercado de uma OCZ/DP com vencimento dentro de "k" períodos e valor nominal "Vn"; e

$\sigma(k) \equiv$ volatilidade da cotação das OCZ/DP com vencimento dentro de "k" períodos

então,

1.1) **A taxa de juro actual de curto prazo ("r") corresponde à "YTM" das OCZ/DP com maturidade igual a um período de tempo, isto é,**

$$\boxed{\boldsymbol{r = Y(1)}} \tag{240}$$

1.2) As taxas de juro de curto prazo que poderão vigorar daqui a um período de tempo são estimadas tendo em conta que:

i) daqui a um período de tempo, a taxa de juro de curto prazo pode, com igual probabilidade (1/2), subir para "r_u" ou descer para "r_d", ou seja,

$$\begin{tikzcd} & r_u \\ r \arrow[ur, dotted, "1/2"] \arrow[dr, dotted, "1/2"'] & \\ & r_d \end{tikzcd}$$

ii) "r_u" e "r_d" têm de ser tais que a "YTM" implícita à "árvore" de taxas de juro de curto prazo para uma OCZ/DP com maturidade de dois períodos de tempo seja igual a "$Y(2)$" bem como a volatilidade de tal "YTM" seja dada por "$\sigma(2)$", ou seja,

$$\begin{cases} \hat{D}(2) = \dfrac{Vn}{\left[1+Y(2)\right]^2} \\ \dfrac{1}{2}\cdot \ln\left(\dfrac{r_u}{r_d}\right) = \sigma(2) \end{cases}$$

sendo,

$\hat{D}(2)$ ≡ valor actual, implícito à "árvore" de taxas de juro de curto prazo, de uma OCZ/DP com maturidade de dois períodos de tempo e valor nominal "Vn".

iii) O preço de um activo, num determinado período de tempo, corresponde ao valor actual do valor esperado para o preço desse activo no período de tempo imediatamente seguinte, pelo que

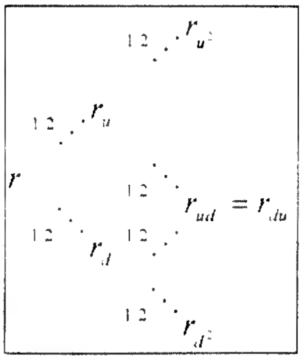
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\underline{k=0} & \underline{k=1} & \underline{k=2} \\
 & & Vn \\
 & \dfrac{Vn}{1+r_u} \arrow[ur, dotted, "1/2"] \arrow[dr, dotted, "1/2"'] & \\
\hat{D}(2) = \dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{Vn}{1+r_u}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{Vn}{1+r_d}\right)}{1+r} \arrow[ur, dotted, "1/2"] \arrow[dr, dotted, "1/2"'] & & Vn \\
 & \dfrac{Vn}{1+r_d} \arrow[ur, dotted, "1/2"] \arrow[dr, dotted, "1/2"'] & \\
 & & Vn
\end{tikzcd}$$

Consequentemente, "r_u" e "r_d" são obtidos mediante a resolução do seguinte sistema de equações:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{Vn}{1+r_u}\right)+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{Vn}{1+r_d}\right)}{1+r} = \dfrac{Vn}{\left[1+Y(2)\right]^2} \\ \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\dfrac{r_u}{r_d}\right) = \sigma(2) \end{cases}}$$

1.3) As taxas de juro de curto prazo que poderão vigorar daqui a dois periodos de tempo são estimadas atendendo a que:

i) Daqui a dois períodos de tempo, a taxa de juro de curto prazo poderá assumir os valores "r_{u^2}", "r_{ud}" = "r_{du}" ou "r_{d^2}", ou seja,



ii) "r_{u^2}", "r_{ud}" e "r_{d^2}" têm de ser tais que a "YTM" implícita à "árvore" de taxas de juro de curto prazo para uma OCZ/DP com maturidade de três períodos de tempo seja igual a "$Y(3)$" bem como a volatilidade de tal "YTM" seja dada por "$\sigma(3)$",

isto é,

$$\begin{cases} \hat{D}(3) = \dfrac{Vn}{\left[1+Y(3)\right]^3} \\ \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\dfrac{r_{u^2}}{r_{ud}}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\dfrac{r_{ud}}{r_{d^2}}\right) = \sigma(3) \end{cases}$$

sendo,

> $\hat{D}(3) \equiv$ valor actual, implícito à "árvore" de taxas de juro de curto prazo, de uma OCZ/DP com maturidade de três períodos de tempo e valor nominal "Vn".

iii) "$\hat{D}(3)$" é dado por

$$\hat{D}(3) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Vn}{1+r_{u^2}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Vn}{1+r_{ud}}\right)}{1+r_u}\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Vn}{1+r_{ud}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Vn}{1+r_{d^2}}\right)}{1+r_d}\right]}{1+r}$$

iv) $\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{r_{u^2}}{r_{ud}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{r_{ud}}{r_{d^2}}\right)\Rightarrow r_{ud}=\sqrt{r_{u^2}\cdot r_{d^2}}$

Deste modo, "r_{u^2}", "r_{ud}" e "r_{d^2}" são estimados mediante a resolução do seguinte sistema de três equações a três incógnitas:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Vn}{1+r_{u^2}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Vn}{1+r_{ud}}\right)}{1+r_u}\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Vn}{1+r_{ud}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Vn}{1+r_{d^2}}\right)}{1+r_d}\right]}{1+r}=\dfrac{Vn}{\left[1+Y(3)\right]^3} \\ \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{r_{u^2}}{r_{ud}}\right)=\sigma(3) \\ r_{ud}=\sqrt{r_{u^2}\cdot r_{d^2}} \end{cases}$$

Aplicando idêntico procedimento até ao fim do horizonte temporal de análise considerado[314], obtém-se a estrutura completa de taxas de juro de curto prazo. Assim e generalizando a análise, a determinação das taxas de juro de curto prazo que poderão vigorar daqui a "k" períodos de tempo (com, $k = 1, 2, \ldots, T_2$ e $T_2 \equiv$ data de vencimento do TDP/LP subjacente) é feita tendo em conta que:

i) Daqui a "k" períodos de tempo, a taxa de juro de curto prazo poderá assumir os "k+1" valores

$$\boxed{r_{u^{k-j}d^j} \qquad \text{com, } j = 0, 1, \ldots, k}$$

ii) As taxas de juro "$r_{u^{k-j}d^j}$" têm de ser tais que a "YTM" implícita à "árvore" de taxas de juro de curto prazo para uma OCZ/DP com maturidade de "k+1" períodos de tempo seja igual a "$Y(k+1)$" bem como a volatilidade de tal "YTM" seja dada por "$\sigma(k+1)$", isto é,

$$\boxed{\begin{cases} \hat{D}(k+1) = \dfrac{Vn}{\left[1 + Y(k+1)\right]^{k+1}} \\ \dfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\dfrac{r_{u^{k-j}d^j}}{r_{u^{k-j+1}d^{j+1}}}\right) = \sigma(k+1), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1 \end{cases}} \qquad (241)$$

sendo,

$\hat{D}(k+1) \equiv$ valor actual, implícito à "árvore" de taxas de juro de curto prazo, de uma OCZ/DP com maturidade de "k+1" períodos de tempo e com um valor nominal igual a "Vn".

iii) O preço de uma OCZ/DP, num determinado período de tempo, corresponde ao valor actual do valor esperado para o seu preço no período de tempo imediatamente seguinte, sendo igual ao seu valor nominal na maturidade, pelo que "$\hat{D}(k+1)$" é obtido com base na resolução do seguinte processo iterativo em ordem a "$\hat{D}_{0,0}(k+1)$":

[314] Isto é, até à data de vencimento do TDP/LP subjacente à opção em análise.

$$\hat{D}_{i,j}(k+1) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{D}_{i+1,j+1}(k+1)}{1+r_{u^{i-j}d^{j+1}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{D}_{i+1,j}(k+1)}{1+r_{u^{i+1-j}d^{j}}}}{1+r_{u^{i-j}d^{j}}}, \quad \begin{array}{l} i = 0,1,\ldots,k \\ j = 0,1,\ldots,i \end{array} \tag{242}$$

com,

$$\hat{D}_{k+1,j}(k+1) = Vn, \quad j = 0,1,\ldots,k+1$$

sendo,

$\hat{D}_{i,j}(k+1) \equiv$ valor, implícito à "árvore" de taxas de juro de curto prazo, de uma OCZ/DP com vencimento no período "k+1" e um valor nominal de "Vn", no período "i" e no "estado" "j".

Concluindo, a estimação das taxas de juro de curto prazo que poderão vigorar daqui a "k" períodos de tempo (com, $k = 1,2,\ldots,T_2$ e $T_2 \equiv$ data de vencimento do TDP/LP subjacente) é efectuada através da resolução do sistema de (1+k) equações (241), sendo "$\hat{D}(k+1)$" dado pela expressão (242).

2º) Determinar a "árvore" de preços futuros do TDP/LP subjacente à opção.

Para estimar o valor futuro do TDP/LP subjacente em cada "nó" da "grelha" de taxas de juro futuras de curto prazo,

2.1) Subdividir o TDP/LP subjacente numa carteira de OCZ/DP de modo a que:
i) existam tantas OCZ/DP quantos os cash flows gerados pelo TDP/LP subjacente;
ii) cada OCZ/DP possua um valor nominal igual ao montante do cash flow do TDP/LP subjacente a ela associado; e
iii) cada OCZ/DP possua uma maturidade idêntica ao período de ocorrência do cash flow do TDP/LP subjacente a ela associado.

Desta forma, o valor do TDP/LP subjacente, em cada período, irá corresponder à soma dos valores associados a cada uma das OCZ/DP.

2.2) Determinar a "árvore" de preços futuros de cada OCZ/DP em que se subdivide o TDP/LP subjacente.

O cálculo do preço futuro de cada OCZ/DP em cada "nó" da "árvore" de taxas de juro futuras de curto prazo é feito através da aplicação da seguinte fórmula de recorrência:

$$\hat{D}_{i,j}(k) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{D}_{i+1,j+1}(k)}{1 + r_{u^{i-j}d^{j+1}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{D}_{i+1,j}(k)}{1 + r_{u^{i+1-j}d^{j}}}}{1 + r_{u^{i-j}d^{j}}}, \qquad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, T_2 \\ i = 0, 1, \ldots, k-1 \\ j = 0, 1, \ldots, i \end{array} \tag{243}$$

com,

$$\hat{D}_{k,j}(k) = CF_k, \quad j = 0, 1, \ldots, k$$

sendo,

$CF_k \equiv$ cash flow gerado pelo TDP/LP subjacente no período "k"; e

$\hat{D}_{i,j}(k) \equiv$ preço, implícito à "árvore" de taxas de juro de curto prazo, de uma OCZ/DP com vencimento no período "k" e um valor nominal de "CF_k", no período "i" e no "estado" "j".

2.3) Determinar a "árvore" de valores futuros da carteira de OCZ/DP

O valor futuro da carteira de OCZ/DP, em cada "nó" da "árvore" de taxas de juro futuras de curto prazo, corresponde ao somatório do valor de cada OCZ/DP pertencente à carteira para esse mesmo "nó", isto é,

$$\hat{D}^c_{i,j} = \sum_{k=1}^{T_2} \hat{D}_{i,j}(k), \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, T_2 \\ j = 0, 1, \ldots, i \end{array} \tag{244}$$

sendo,

$\hat{D}^c_{i,j} \equiv$ valor, implícito à "árvore" de taxas de juro de curto prazo, da carteira de OCZ/DP, no período "i" e no "estado" "j".

2.4) Determinar a "árvore" de preços futuros do TDP/LP subjacente à opção

Para estimar os preços futuros da obrigação subjacente basta, em cada período, deduzir aos valores futuros da carteira de OCZ/DP associados aos diversos "estados" o cash flow liberto pelo TDP/LP subjacente nesse mesmo período de tempo, ou seja,

$$\hat{B}_{i,j} = \hat{D}^c_{i,j} - CF_i, \quad \begin{array}{l} i = 0,1,\ldots,T_2 \\ j = 0,1,\ldots,i \end{array} \tag{245}$$

sendo,

$CF_i \equiv$ cash flow gerado pelo TDP/LP subjacente no período "i"; e

$\hat{B}_{i,j} \equiv$ preço do TDP/LP subjacente, implícito à "árvore" de taxas de juro futuras de curto prazo, no período "i" e para o "estado" "j".

3°) Determinação do valor actual da opção.

3.1) Começa-se pela determinação do valor da opção na sua data de vencimento, mediante a consideração do seu *valor intrínseco*.

3.1.1) Opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$c_{T_1,j} = C_{T_1,j} = \max\left(0, \hat{B}_{T_1,j} - X\right) \qquad j = 0,1,\ldots,T_1 \tag{246}$$

sendo,

$c_{i,j} \equiv$ valor de uma opção de compra "europeia", no período "i" e para o "estado" "j";

$C_{i,j} \equiv$ valor de uma opção de compra "americana", no período "i" e para o "estado" "j";

$T_1 \equiv$ data de vencimento da opção; e

X ≡ preço de exercício da opção.

3.1.2) Opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$p_{T_1,j} = P_{T_1,j} = \max\left(0, X - \hat{B}_{T_1,j}\right) \qquad j = 0,1,\ldots,T_1 \tag{247}$$

sendo,

$p_{i,j} \equiv$ valor de uma opção de venda "europeia", no período "i" e para o "estado" "j"; e

$P_{i,j} \equiv$ valor de uma opção de venda "americana", no período "i" e para o "estado" "j".

3.2) E prossegue-se, até à data de avaliação (i = 0), por ordem cronológica inversa e confrontando, no caso das opções "americanas", o valor estimado pelo modelo com o *valor intrínseco* da opção.

3.2.1) Opções "europeias"

3.2.1.1) Opções de compra

$$c_{i,j} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{c_{i+1,j+1}}{1+r_{u^{i-j}d^{j+1}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c_{i+1,j}}{1+r_{u^{i+1-j}d^{j}}}}{1+r_{u^{i-j}d^{j}}}, \quad \begin{array}{l} i = 0,1,\ldots,T_1 - 1 \\ j = 0,1,\ldots,i \end{array} \tag{248}$$

3.2.1.2) Opções de venda

$$p_{i,j} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{p_{i+1,j+1}}{1+r_{u^{i-j}d^{j+1}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p_{i+1,j}}{1+r_{u^{i+1-j}d^{j}}}}{1+r_{u^{i-j}d^{j}}}, \quad \begin{array}{l} i = 0,1,\ldots,T_1 - 1 \\ j = 0,1,\ldots,i \end{array} \tag{249}$$

3.2.2) Opções "americanas"

3.2.2.1) Opções de compra

$$C_{i,j} = \max\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{i+1,j+1}}{1+r_{u^{i-j}d^{j+1}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{C_{i+1,j}}{1+r_{u^{i+1-j}d^{j}}}}{1+r_{u^{i-j}d^{j}}}, \hat{B}_{i,j} - X \right), \quad \begin{array}{l} i = 0,1,\ldots,T_1 - 1 \\ j = 0,1,\ldots,i \end{array} \tag{250}$$

3.2.1.2) Opções de venda

$$P_{i,j} = \max\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{P_{i+1,j+1}}{1 + r_{u^{i-j} d^{j+1}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_{i+1,j}}{1 + r_{u^{i+1-j} d^{j}}}}{1 + r_{u^{i-j} d^{j}}}, X - \hat{B}_{i,j} \right), \quad \begin{array}{l} i = 0,1,\ldots,T_1 - 1 \\ j = 0,1,\ldots,i \end{array} \tag{251}$$

3.3.3.7. Modelo de Brennan e Schwartz[315]

Todos os modelos da estrutura temporal das taxas de juro considerados até agora envolveram apenas uma variável estocástica (sendo por isso designados por "modelos unifactoriais").

Pelo contrário, o modelo de Brennan e Schwartz faz depender a "yield curve" de duas variáveis estocásticas independentes, a saber:

- a taxa de juro de curto prazo ("r"); e
- a taxa de juro de longo prazo ("l").

A taxa de juro de curto prazo corresponde à "yield to maturity" ("YTM") de uma obrigação de cupão zero de dívida pública ("OCZ/DP") com vencimento imediato, ou seja,

$$r = \lim_{\tau \to 0}\left[-\frac{\ln B(r,l,\tau,0)}{\tau}\right]^{316}$$

sendo,

B(r,l,τ,J) ≡ preço de uma obrigação com um tempo em falta para o vencimento de "τ" e que liberta, continuamente, um cupão de "J".

Por seu turno, a taxa de juro de longo prazo é dada pela "YTM" de uma obrigação perpétua, isto é,

$$l = \frac{J}{B(r,l,+\infty,J)}.$$

Brennan e Schwartz pressupõem que "r" e "l" seguem os seguintes processos estocásticos:

$$dr = \mu_r(r,l)\cdot dt + \sigma_r(r,l)\cdot dZ_r \qquad \text{e} \qquad dl = \mu_l(r,l)\cdot dt + \sigma_l(r,l)\cdot dZ_l$$

sendo,

Z_r e Z_l *processos de Wiener*;

$E(dZ_r) = E(dZ_l) = 0$;

---

[315]Brennan, M. J., e E. S. Schwartz, "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, vol. 3, July 1979, pp. 133-55; Brennan, M. J., e E. S. Schwartz, "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency", *Option Pricing*, Lexinton Books, 1983, capitulo 6, pp. 125-51.

[316]Pois, $B(r,l,\tau,0) = e^{-r\cdot\tau} \Rightarrow r = -\frac{\ln B(r,l,\tau,0)}{\tau}$.

$E(dZ_r^2) = E(dZ_l^2) = dt$;

$E(dZ_r \cdot dZ_l) = \rho \cdot dt$; e

$\rho \equiv$ coeficiente de correlação linear instantâneo entre os dois processos.

Assim sendo, estes autores deduzem a seguinte equação diferencial para o valor de uma obrigação de dívida pública ou para o valor de um seu produto derivado (nomeadamente para o valor de uma opção sobre um título de dívida pública de cupão zero -se J = 0- ou não -se J ≠ 0), em que "λ" representa o preço de mercado do prémio de risco de curto prazo:

$$\boxed{\frac{1}{2}\cdot\sigma_r^2\cdot V_{rr}+\rho\cdot\sigma_r\cdot\sigma_l\cdot V_{rl}+\frac{1}{2}\cdot\sigma_l^2\cdot V_{ll}+(\mu_r-\lambda\cdot\sigma_r)\cdot V_r+\left(\sigma_l^2/l+l^2-r\cdot l\right)\cdot V_l+V_t-r\cdot V+J=0}$$

Com base na equação diferencial anterior e para avaliar uma opção sobre uma obrigação de dívida pública é necessário:

1°) Estimar os processos estocásticos de "r" e "l".

Para este efeito, Brennan e Schwartz sugerem que os processos estocásticos, em tempo continuo e unicamente para efeitos de estimação, sejam dados por

$$\begin{cases} dr = \left[a_1 + b_1\cdot(l-r)\right]\cdot dt + r\cdot\sigma_1\cdot dZ_r \\ dl = l\cdot(a_2 + b_2\cdot r + c_2\cdot l)\cdot dt + \rho\cdot\sigma_2\cdot dZ_l \end{cases}$$

de forma a que seja possível estimar, através do modelo geral de regressão linear[317], as seguintes aproximações em tempo discreto:

$$\begin{cases} \dfrac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}} = \dfrac{a_1}{r_{t-1}} + b_1\cdot\left(\dfrac{l_{t-1}}{r_{t-1}} - 1\right) + e_{1,t} \\ \dfrac{l_t - l_{t-1}}{l_{t-1}} = a_2 + b_2\cdot r_{t-1} + c_2\cdot l_{t-1} + e_{2,t} \end{cases}$$

[317] Método de Aitken.

2°) Estimar o parâmetro "λ".

Tal é feito via "tentativa e erro". Isto é, arbitra-se um valor para o parâmetro "λ" e utiliza-se o modelo para avaliar um qualquer activo transaccionável que seja função das taxas de juro ("r" e "l"); por exemplo, uma obrigação. Repete-se o procedimento anterior sucessivas vezes, corrigindo em cada etapa o parâmetro "λ", até que o valor fornecido pelo modelo coincida com o valor de mercado do activo sujeito a avaliação.

3°) Avaliar a obrigação subjacente mediante a resolução da equação diferencial.

Se a obrigação subjacente for uma OCZ/DP, então resolver-se-á a equação diferencial - por exemplo, através do método das diferenças finitas- impondo a condição "J = 0" e sujeita à restrição

$$B(r,l,0,0) = \text{valor nominal da OCZ/DP subjacente.}$$

4°) Avaliar a opção mediante a resolução da equação diferencial.

O valor de um qualquer tipo de opção sobre obrigações de dívida pública é encontrado mediante a resolução da anterior equação diferencial, sendo que o factor distintivo do valor de cada tipo de opção reside nas restrições impostas à equação diferencial. Assim:

i) o valor de uma opção de compra "europeia" sobre obrigações de dívida pública - $c(B,X,T_1)$- é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma_r^2\cdot c_{rr}+\rho\cdot\sigma_r\cdot\sigma_l\cdot c_{rl}+\frac{1}{2}\cdot\sigma_l^2\cdot c_{ll}+(\mu_r-\lambda\cdot\sigma_r)\cdot c_r+\left(\sigma_l^2/l+l^2-r\cdot l\right)\cdot c_l+c_t-r\cdot c+J=0$$

sujeita à restrição

$$c_{T_1}(B,X,T_1)=\max\left[B(r,l,T_2-T_1,J)-X,0\right].$$

sendo,

T_2 ≡ data de vencimento da obrigação subjacente;
T_1 ≡ data de vencimento da opção (com, $T_1 \leq T_2$); e
X ≡ preço de exercício da opção.

ii) o valor de uma opção de venda "europeia" sobre obrigações de dívida pública - $p(B,X,T_1)$- é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma_r^2\cdot p_{rr}+\rho\cdot\sigma_r\cdot\sigma_l\cdot p_{rl}+\frac{1}{2}\cdot\sigma_l^2\cdot p_{ll}+(\mu_r-\lambda\cdot\sigma_r)\cdot p_r+\left(\sigma_l^2/l+l^2-r\cdot l\right)\cdot p_l+p_t-r\cdot p+J=0$$

sujeita à restrição

$$p_{T_1}(B,X,T_1)=\max\left[X-B(r,l,T_2-T_1,J),0\right].$$

iii) o valor de uma opção de compra "americana" sobre obrigações de dívida pública - $C(B, X, T_1)$- é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma_r^2\cdot C_{rr}+\rho\cdot\sigma_r\cdot\sigma_l\cdot C_{rl}+\frac{1}{2}\cdot\sigma_l^2\cdot C_{ll}+(\mu_r-\lambda\cdot\sigma_r)\cdot C_r+\left(\sigma_l^2/l+l^2-r\cdot l\right)\cdot C_l+C_t-r\cdot C+J=0$$

sujeita à restrição

$$C_t(B,X,T_1)\geq\max\left[0,B(r,l,T_2-t,J)-X\right],\quad\text{para }\forall t\leq T_1.$$

iv) o valor de uma opção de venda "americana" sobre obrigações de dívida pública - $P(B, X, T_1)$- é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot\sigma_r^2\cdot P_{rr}+\rho\cdot\sigma_r\cdot\sigma_l\cdot P_{rl}+\frac{1}{2}\cdot\sigma_l^2\cdot P_{ll}+(\mu_r-\lambda\cdot\sigma_r)\cdot P_r+\left(\sigma_l^2/l+l^2-r\cdot l\right)\cdot P_l+P_t-r\cdot P+J=0$$

sujeita à restrição

$$P_t(B,X,T_1)\geq\max\left[0,X-B(r,l,T_2-t,J)\right],\quad\text{para }\forall t\leq T_1.$$

3.3.4. Modelo de Ball e Torous

O modelo de Ball e Torous[318] pode ser encarado como uma adaptação do modelo de Black-Scholes destinada à avaliação de opções "europeias" sobre "obrigações de cupão zero" emitidas pelo Estado, num cenário de incerteza acerca da evolução das taxas de juro. Com efeito, estes autores ao pressuporem que a componente estocástica do rendimento gerado por uma OCZ/DP segue um processo estocástico designado por "Brownian Bridge Process", demonstram que o seu preço pode ser encarado como seguindo um movimento browniano geométrico, o que lhes permite adaptar facilmente o modelo de Black-Scholes à avaliação de opções "europeias" sobre tais títulos (sem, portanto, admitir que a taxa de juro de curto prazo é constante[319]). Note-se que, ao contrário dos modelos derivados da estrutura temporal de taxas de juro, Ball e Torous consideram como variável de "estado" o preço da OCZ/DP e não as taxas de juro.

Com vista à dedução do modelo em análise, seja

$B(t;m) \equiv$ preço, no momento "t" (com $t \in [0,m]$), de uma OCZ/DP com vencimento no momento "m" e de valor nominal unitário.

Tratando-se de uma "obrigação de cupão zero", então:

$$B(m;m) = 1, \qquad \forall m \in [0,+\infty[$$

Por outro lado, considere-se o processo dado por:

$$\pi(t;m) = \ln\left[\frac{B(t;m)}{B(0;m)}\right] = \ln B(t;m) - \ln B(0;m)$$

em que,

$\pi(t;m) \equiv$ rendimento logarítmico proporcionado por uma OCZ/DP com vencimento no momento "m", ao fim de "t" períodos de tempo.

Facilmente se constata que tal processo está sujeito a duas restrições, nos momentos t = 0 e t = m:

[318] Ball, Clifford A., e Walter N. Torous, "Bond Price Dynamics and Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 18, nº. 4, Dezembro de 1983, pp. 517-31.

[319] Grande diferença -e vantagem- deste modelo relativamente ao modelo de Black-Scholes.

i) momento "0": $\pi(0;m) = 0$[320];

ii) momento "m": $\pi(m;m) = -\ln B(0;m)$[321].

Deste modo,

$\mu(m) \equiv$ rendimento logarítmico por unidade de tempo, proporcionado pela detenção em carteira e até à maturidade de uma OCZ/DP com vencimento no momento "m":

$$\mu(m) = \frac{\pi(m;m)}{m} = \frac{-\ln B(0;m)}{m}$$

e

$\mu(m) \cdot t \equiv$ rendimento logarítmico determinístico proporcionado, ao fim de "t" períodos de tempo (com $t \leq m$), por uma OCZ/DP com vencimento no período "m".

Consequentemente, $\pi(t;m)$ engloba uma componente determinística -$\mu(m) \cdot t$- e uma componente estocástica designada por "$\eta(t;m)$":

$$\pi(t;m) = \mu(m) \cdot t + \eta(t;m)$$

$$\Updownarrow$$

$$\eta(t;m) = \pi(t;m) - \mu(m) \cdot t$$

com,

$\eta(t;m) \equiv$ rendimento logarítmico extraordinário proporcionado, ao fim de "t" períodos de tempo, por uma OCZ/DP com vencimento no momento "m".

Como $\pi(0;m) = 0$ e $\pi(m;m) = -\ln B(0;m)$, então também o processo estocástico $\{\eta(t;m):\ t \in [0,m]\}$ está sujeito a duas restrições, nos momentos t = 0 e t = m:

i) momento "0": $\eta(0;m) = 0$[322];

---

[320]Pois, $\pi(0;m) = \ln\left[\frac{B(0;m)}{B(0;m)}\right] = \ln(1) = 0$.

[321]Pois, $\pi(m;m) = \ln B(m;m) - \ln B(0;m) = \ln(1) - \ln B(0;m) = -\ln B(0;m)$.

[322]Pois, $\eta(0;m) = \pi(0;m) - \mu(0) \cdot 0 = 0 - 0 = 0$.

ii) momento "m": $\eta(m;m) = 0$[323].

Ora, como $\eta(m;m) = 0$, então ao invés de se admitir um movimento browniano standard, pode-se considerar, por hipótese, que "$\eta(t;m)$" segue o denominado "Brownian Bridge Process"[324] (o qual não é mais do que um movimento browniano standard com uma condição terminal). Consequentemente[325], $\eta(t;m)$ pode ser representado por:

$$d\eta(t;m) = -\frac{\eta(t;m)}{1-t}\cdot dt + \sigma\cdot dZ \qquad \text{com, } dZ \cap N\left(0,\sqrt{dt}\right).$$

Por outro lado, como

$$\begin{cases} \ln\left[\dfrac{B(t;m)}{B(0;m)}\right] = \pi(t;m) \\ \pi(t;m) = \mu(m)\cdot t + \eta(t;m) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(t;m) = B(0;m)\cdot \exp\left[\mu(m)\cdot t + \eta(t;m)\right]$$

então, aplicando o *Lema de ITO*:

$$dB(t;m) = \left[-\frac{\eta(t;m)}{1-t}\cdot\frac{\partial B(t;m)}{\partial\eta(t;m)} + \frac{\partial B(t;m)}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 B(t;m)}{\partial\eta(t;m)^2}\cdot\sigma^2\right]\cdot dt + \frac{\partial B(t;m)}{\partial\eta(t;m)}\cdot\sigma\cdot dZ$$

---

[323]Pois, $\eta(m;m) = \pi(m;m) - \mu(m)\cdot m = -\ln B(0;m) - \left[-\ln B(0;m)\right] = 0$.

[324]Isto é, $\eta(t;m) = \sigma\cdot\psi\left(t/m\right)$ sendo "σ" o desvio-padrão instantâneo do rendimento logarítmico extraordinário e $\{\psi(s):\ s\in[0,1]\}$ tal que:

i) $\psi(0) = 0$ com probabilidade 1;

ii) $\{\psi(s):\ s\in[0,1]\}$ é um processo de Gauss com

$$E[\psi(s)] = 0 \quad \text{e} \quad E\left[\psi(s_i)\cdot\psi(s_j)\right] = s_i\cdot(1-s_j),\quad 0\le s_i\le s_j\le 1;\ \text{e}$$

iii) $\psi(1) = 0$ com probabilidade 1.

[325]Visto que $\quad d\psi = -\dfrac{\psi}{1-t} + dZ \quad$ com, $dZ \cap N\left(0,\sqrt{dt}\right)$.

$\Updownarrow$[326]

$$dB(t;m)=\left\{\left[-\frac{\eta(t;m)}{1-t}+\mu(m)+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right]\cdot B(t;m)\right\}\cdot dt+\left[\sigma\cdot B(t;m)\right]\cdot dZ$$

$$\Updownarrow \qquad \eta(t;m)=\pi(t;m)-\mu(m)\cdot t=\ln\left[\frac{B(t;m)}{B(0;m)}\right]-\mu(m)\cdot t$$

$$dB(t;m)=\alpha\left[B(t;m),t\right]\cdot dt+\sigma\left[B(t;m),t\right]\cdot dZ$$

sendo,

$$\alpha\left[B(t;m),t\right]=\left\{\mu(m)+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2+\frac{\ln\left[\frac{B(0;m)}{B(t;m)}\right]+\mu(m)\cdot t}{1-t}\right\}\cdot B(t;m)\text{; e}$$

$$\sigma\left[B(t;m),t\right]=\sigma\cdot B(t;m)$$

Assim sendo, o modelo de avaliação de uma opção de compra "europeia" sobre uma OCZ/DP pode ser facilmente obtido mediante a consideração dos pressupostos associados ao modelo de Black-Scholes, com excepção:

i) do pressuposto referente ao processo estocástico seguido pelo activo subjacente, o qual é substituído por

$$dB(t;m)=\alpha_m\cdot B(t;m)\cdot dt+\sigma_m\cdot B(t;m)\cdot dZ$$

com,

---

[326] $\frac{\partial B(t;m)}{\partial\eta(t;m)}=B(0;m)\cdot\exp\left[\mu(m)\cdot t+\eta(t;m)\right]=B(t;m)$; $\frac{\partial^2 B(t;m)}{\partial\eta(t;m)^2}=B(t;m)$; e

$$\frac{\partial B(t;m)}{\partial t}=\mu(m)\cdot B(0;m)\cdot\exp\left[\mu(m)\cdot t+\eta(t;m)\right]=\mu(m)\cdot B(t;m).$$

$$\alpha_m = \mu(m) + \frac{1}{2}\cdot\sigma_m^2 + \frac{\ln\left[\frac{B(0;m)}{B(t;m)}\right] + \mu(m)\cdot t}{1-t}$$

m ≡ data de vencimento da OCZ/DP subjacente

ii) e do pressuposto referente ao comportamento da taxa de juro sem risco, o qual é substituído por

$$dB(t;T) = \alpha_T \cdot B(t;T)\cdot dt + \sigma_T \cdot B(t;T)\cdot dZ$$

com,

$$\alpha_T = \mu(T) + \frac{1}{2}\cdot\sigma_T^2 + \frac{\ln\left[\frac{B(0;T)}{B(t;T)}\right] + \mu(T)\cdot t}{1-t}$$

T ≡ data de vencimento da opção

com, $E\left[dZ(t;m)\cdot dZ(t;T)\right] = \rho\cdot dt$.

Tal significa então que o modelo de Ball-Torous para opções de compra "europeias" pode ser deduzido através da substituição, na correspondente fórmula de Black-Scholes (equação n° 63), de:

i) "S_t" por "$Vn \cdot B(t;m)$" (com Vn ≡ valor nominal da OCZ/DP subjacente);

ii) $e^{-r\cdot\tau}$ por $B(t;T)$; e

iii) σ por $v = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_T^2 - 2\cdot\rho\cdot\sigma_m\cdot\sigma_T}$.

De facto,

$$\begin{cases} c_t(S,X,T) = S_t\cdot N(h) - e^{-r\tau}\cdot X\cdot N\left(h-\sigma\cdot\sqrt{\tau}\right), \qquad h = \dfrac{\ln\left(S_t/X\right) + \left(r+\sigma^2/2\right)\cdot\tau}{\sigma\cdot\sqrt{\tau}} \\ S_t = Vn\cdot B(t;m) \\ e^{-r\cdot\tau} = B(t;T) \\ \sigma = v \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

MODELO DE BALL-TOROUS:
OPÇÕES DE COMPRA "EUROPEIAS"[327] SOBRE OCZ/DP

$$c_t\left[B(t;m),X,T\right] = Vn \cdot B(t;m) \cdot N(h) - B(t;T) \cdot X \cdot N\left(h - \nu \cdot \sqrt{\tau}\right)$$

com,

$$h = \frac{\ln\left[\frac{Vn \cdot B(t;m)}{X}\right] - \ln B(t;T) + \frac{\nu^2 \cdot \tau}{2}}{\nu \cdot \sqrt{\tau}} \quad [328] \qquad (252)$$

sendo,

$Vn \cdot B(t;m) \equiv$ preço, no momento "t", da OCZ/DP subjacente;

$B(t;T) \equiv$ preço, no momento "t" (data de avaliação), de uma OCZ/DP de valor nominal unitário e com vencimento na maturidade da opção;
Vn ≡ valor nominal da OCZ/DP subjacente;
X ≡ preço de exercício da opção; e
$\tau = T - t$.

Para obter o valor de equilíbrio de uma opção de venda "europeia", basta aplicar o seguinte teorema de paridade "put-call"[329]:

$$c_t\left[B(t;m),X,T\right] - p_t\left[B(t;m),X,T\right] = Vn \cdot B(t;m) - X \cdot B(t;T)$$

$$\Updownarrow \qquad (252)$$

$$p_t\left[B(t;m),X,T\right] = -Vn \cdot B(t;m) \cdot \left[1 - N(h)\right] + B(t;T) \cdot X \cdot \left[1 - N\left(h - \nu \cdot \sqrt{\tau}\right)\right]$$

$$\Updownarrow$$

[327] Ou "americanas".

[328] $e^{-r \cdot \tau} = B(t;T) \Rightarrow r \cdot \tau = -\ln B(t;T)$.

[329] Adaptação da expressão (56) aos pressupostos de Ball e Torous.

MODELO DE BALL-TOROUS:
OPÇÕES DE VENDA "EUROPEIAS" SOBRE OCZ/DP

$$p_t\left[B(t;m),X,T\right] = -Vn \cdot B(t;m) \cdot N(-h) + B(t;T) \cdot X \cdot N\left(v \cdot \sqrt{\tau} - h\right) \qquad (253)$$

com,

$$h = \frac{\ln\left[\frac{Vn \cdot B(t;m)}{X}\right] - \ln B(t;T) + \frac{v^2 \cdot \tau}{2}}{v \cdot \sqrt{\tau}}$$

Tal como no modelo de Black-Scholes, a aplicação das fórmulas (252) e (253) requer somente a estimação prévia de um parâmetro, a saber: o parâmetro "v". Para o efeito, Ball e Torous sugerem a utilização do seguinte estimador[330]:

$$\hat{v} = \sqrt{r^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{r} \left(x_i - w_i\right)^2} \qquad (254)$$

sendo,

$\hat{v}$ ≡ estimador do parâmetro "v";

x_i ≡ rendimento gerado, no período "i", por uma OCZ/DP com vencimento no momento "m";

w_i ≡ rendimento gerado, no período "i", por uma OCZ/DP com vencimento no momento "T"; e

r ≡ número de períodos considerados na estimação do parâmetro "v".

Em síntese, o interesse do modelo de Ball e Torous reside no facto de este fornecer fórmulas de avaliação analíticas "fechadas" e envolver somente a estimação de um único parâmetro.

No entanto e para além do facto do modelo em análise apenas ser aplicável a opções "europeias" sobre "obrigações de cupão zero" emitidas pelo Estado, Ball e Torous ao assumirem que a componente estocástica do rendimento gerado por uma OCZ/DP segue um "Brownian Bridge Process", pressupõem então que a variância da taxa de rendimento da OCZ/DP (σ) é constante ao longo do tempo. Ora, segundo Schaefer e Schwartz tal significa que a variância da "YTM" da OCZ/DP aumenta sem limites à medida que a obrigação se aproxima do seu vencimento. Com efeito, como:

[330] Ball, Clifford A., e Walter N. Torous (1983), pp. 530.

i) $\sigma = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} \cdot \sigma_y$ [331], sendo

$\sigma \equiv$ desvio padrão da taxa de rendimento da obrigação:
B ≡ preço da obrigação;
y ≡ "yield to maturity" da obrigação; e
σ_y ≡ desvio padrão da "yield to maturity" da obrigação.

ii) $D = \left| \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} \right|$, com

D ≡ duração de Redington.

Então,

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{D}$$

pelo que, à medida que o tempo em falta para a maturidade da obrigação vai diminuindo, a sua "duration" também decresce e, uma vez que "σ" é suposto constante, "σ_y" aumenta.

---

[331] Pois, assumindo que $dy = \mu_y(y,t) \cdot dt + \sigma_y(y,t) \cdot dZ$ então, aplicando o *Lema de ITO* a B = B(y,t), vem:

$$\frac{dB}{B} = \left(\frac{\partial B}{\partial y} \cdot \mu_y + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \cdot \sigma_y^2 \right) \cdot \frac{1}{B} dt + \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} \cdot \sigma_y \right) \cdot dZ.$$

Ora, σ não é mais do que o desvio padrão de dB/B.

3.3.5. Modelo de Schaefer e Schwartz

Schaefer e Schwartz[332] desenvolveram um modelo unifactorial, cuja variável de "estado" é dada pelo preço da obrigação subjacente à opção[333] (ao contrário do que sucede com os modelos decorrentes das teorias de equilíbrio da estrutura a prazo das taxas de juro) e que (ao contrário dos modelos de Black-Scholes e de Ball-Torous) assume que o desvio padrão da taxa de rendimento da obrigação subjacente é proporcional à sua "duration". No fundo, o modelo de Schaefer e Schwartz não é mais do que uma adaptação do modelo de Black-Scholes ao facto de a variância da taxa de rendimento de uma obrigação variar ao longo do tempo.

3.3.5.1. Pressupostos

A utilização do modelo de Schaefer e Schwartz envolve a aceitação das seguintes premissas:

i) Os mercados de opções e de obrigações (do Estado) não envolvem quaisquer custos de transacção, sendo os diversos títulos perfeitamente divisíveis;

ii) Os investidores são racionais e portanto não existem oportunidades de arbitragem;

iii) A taxa de rendimento sem risco é constante durante a vida da opção e igual a "r" por unidade de tempo. Trata-se obviamente de um pressuposto questionável pois, conforme já foi referido, não só contraria o carácter estocástico da variação do preço de uma obrigação ao longo do tempo como também não é confirmado pela evidência empírica. No entanto, esta assunção é justificada: não só pela relativa aderência à realidade patenteada pelo modelo de Black-Scholes (o qual, recorde-se, parte de idêntica premissa); como também pela necessidade de simplificar a análise pois, caso contrário e tal como acontece com os modelos de avaliação decorrentes das teorias de equilíbrio da estrutura a prazo das taxas de juro, haveria que estimar o processo estocástico das taxas de juro de curto prazo, o prémio de risco de curto prazo e também os preços da obrigação subjacente correspondentes às restrições na maturidade impostas à equação diferencial do valor da opção. Em suma, a hipótese em causa justifica-se pois, "a validade de um modelo deve ser julgada, não em função da verosimilhança dos seus pressupostos, mas sim tendo em conta o seu grau de ajustamento à realidade";

iv) O preço da obrigação subjacente segue um *processo de ITO*, isto é,

---

[332] Schaefer, S. M., e E. S. Schwartz, "Time-Dependent Variance and the Pricing of Bond Options", *The Journal of Finance*, vol. XLII, nº 5, December 1987, pp. 1113-28.
[333] A taxa de juro de curto prazo é suposta constante.

$$\frac{dB}{B} = \mu(B,t) \cdot dt + \sigma(B,t) \cdot dZ$$

sendo,

B ≡ preço da obrigação subjacente;

dB/B ≡ taxa de rendimento instantânea da obrigação subjacente;

μ ≡ taxa de rendimento instantânea esperada para a obrigação subjacente;

σ ≡ desvio padrão da taxa de rendimento instantânea da obrigação subjacente; e

Z um *processo de Wiener*.

v) A obrigação subjacente gera, continuamente, um cupão no valor de "J"; e

vi) O desvio padrão da taxa de rendimento da obrigação subjacente é proporcional à sua "duration", ou seja,

$$\sigma(B,t) = k \cdot B^{\alpha-1} \cdot D(B,t)$$

sendo,

α e k constantes; e

D(B,t) ≡ duração de Redington:

$$D(B,t) = \frac{\sum_t t \cdot CF_t \cdot e^{-yt}}{B}$$

com,

CF_t ≡ cash flow gerado pela obrigação subjacente no período "t";

y ≡ "yield to maturity" da obrigação subjacente; e

$B = \sum_t CF_t \cdot e^{-yt}$ ≡ valor de transacção da obrigação subjacente.

A anterior fórmula assumida para o parâmetro σ(B,t) resulta unicamente da evidência empírica, já que com base em dados relativos aos títulos de dívida pública do Reino Unido e mediante a estimação da expressão

$\sigma = a + b \cdot D + \varepsilon$ (com $\varepsilon \cap N(0,1)$ e sendo "a" e "b" constantes)

os autores verificaram que a "duration" explicava uma grande parte da variabilidade do parâmetro σ(B,t)[334] e portanto assumiram a "duration" como sendo uma boa medida do desvio padrão da taxa de rendimento de uma obrigação.

De qualquer forma, assumindo-se como variável a variância do processo estocástico da obrigação subjacente, é agora possível ter em conta a alteração processada sobre as características dessa mesma obrigação à medida que esta se aproxima da sua maturidade,

[334] Mais exactamente, Schaefer e Schwartz chegaram a um coeficiente de determinação de $R^2 = 94\%$.

isto é, já é possível ter em conta o facto de a variância da taxa de rendimento de uma obrigação diminuir à medida que esta se aproxima da sua data de vencimento[335].

3.3.5.2. Equação diferencial fundamental

Atendendo à equação

$$dB = \mu \cdot B \cdot dt + \sigma(B,t) \cdot B \cdot dZ$$

e aplicando o *Lema de ITO* à função

V = V(B,t) ≡ valor de uma opção sobre uma obrigação de dívida pública

vem,

$$dV = \left[\frac{\partial V}{\partial B} \cdot \mu \cdot B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial B^2} \cdot B^2 \cdot \sigma^2(B,t) \right] \cdot dt + \frac{\partial V}{\partial B} \cdot B \cdot \sigma(B,t) \cdot dZ$$

Por outro lado, sendo

Π ≡ valor de uma carteira composta por:

i) uma posição "curta" sobre uma opção de obrigações de dívida pública; e

ii) uma posição "longa" sobre "$\partial V / \partial B$" obrigações de dívida pública,

então

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial B} \cdot B$$

pelo que,

$d\Pi$ ≡ variação do valor da carteira no espaço de tempo "dt":

$$d\Pi = -dV + \frac{\partial V}{\partial B} \cdot (dB + J \cdot dt)$$

Portanto,

[335] Teoricamente, este fenómeno é explicado pelo facto de o preço de uma obrigação convergir para o seu valor nominal na sua data de vencimento. Contudo, Ho e Lee contrapõem que existe ainda um outro efeito de sinal contrário sobre a volatilidade do preço de uma obrigação, o qual pode superar o primeiro efeito referido anteriormente: à medida que a obrigação se aproxima da sua data de vencimento, também aumenta a incerteza associada à estrutura temporal de taxas de juro em vigor nessa mesma data.

$$\begin{cases} d\Pi = -dV + \dfrac{\partial V}{\partial B}\cdot(dB + J\cdot dt) \\ dV = \left[\dfrac{\partial V}{\partial B}\cdot\mu\cdot B + \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 V}{\partial B^2}\cdot B^2\cdot\sigma^2(B,t)\right]\cdot dt + \dfrac{\partial V}{\partial B}\cdot B\cdot\sigma(B,t)\cdot dZ \\ dB = \mu\cdot B\cdot dt + \sigma(B,t)\cdot B\cdot dZ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\Pi = -\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot B^2\cdot\sigma^2(B,t)\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} - \frac{\partial V}{\partial B}\cdot J\right]\cdot dt$$

Mas, como $d\Pi$ não depende de dZ, então Π é uma carteira sem risco, pelo que deve proporcionar uma remuneração idêntica à taxa de rendimento sem risco ("r"):

$$d\Pi = r\cdot\Pi\cdot dt$$

$$d\Pi = -\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot B^2\cdot\sigma^2(B,t)\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} - \frac{\partial V}{\partial B}\cdot J\right]\cdot dt \qquad \Downarrow \qquad \Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial B}\cdot B$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\cdot B^2\cdot\sigma^2(B,t)\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} + (r\cdot B - J)\cdot\frac{\partial V}{\partial t} - r\cdot V = 0}$$ (Equação diferencial fundamental)

sendo,

$$\sigma(B,t) = k\cdot B^{\alpha-1}\cdot D(B,t)$$

Portanto, o valor de um qualquer tipo de opção sobre obrigações de dívida pública (opções de compra ou de venda; e opções de tipo "europeu" ou "americano") é encontrado mediante a resolução da anterior equação diferencial, sendo que o factor distintivo do valor de cada tipo de opção reside nas restrições impostas à equação diferencial. Assim:

i) o valor de uma opção de compra "europeia" sobre obrigações de dívida pública - $c(B,X,T)$ - é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot B^2\cdot\sigma^2(B,t)\cdot\frac{\partial^2 c}{\partial B^2} + (r\cdot B - J)\cdot\frac{\partial c}{\partial t} - r\cdot c = 0$$

sujeita à restrição

$$c_T(B,X,T) = \max(0, B_T - X).$$

ii) o valor de uma opção de venda "europeia" sobre obrigações de dívida pública - $p(B,X,T)$- é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot B^2\cdot\sigma^2(B,t)\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial B^2}+(r\cdot B-J)\cdot\frac{\partial p}{\partial t}-r\cdot p=0$$

sujeita à restrição

$$p_T(B,X,T)=\max(0,X-B_T).$$

iii) o valor de uma opção de compra "americana" sobre obrigações de dívida pública -$C(B,X,T)$- é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot B^2\cdot\sigma^2(B,t)\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial B^2}+(r\cdot B-J)\cdot\frac{\partial C}{\partial t}-r\cdot C=0$$

sujeita à restrição

$$C_t(B,X,T)\geq\max(0,B_t-X),\quad \text{para } \forall t\leq T.$$

iv) o valor de uma opção de venda "americana" sobre obrigações de dívida pública -$P(B,X,T)$- é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\cdot B^2\cdot\sigma^2(B,t)\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial B^2}+(r\cdot B-J)\cdot\frac{\partial P}{\partial t}-r\cdot P=0$$

sujeita à restrição

$$P_t(B,X,T)\geq\max(0,X-B_t),\quad \text{para } \forall t\leq T.$$

3.3.5.3. Estimação dos parâmetros "k" e "α"

Com excepção da função σ(B,t), todos os parâmetros presentes na equação diferencial fundamental são idênticos aos parâmetros do modelo de Black-Scholes e são directamente observáveis.

Contudo, cada vez que se calcula o valor de uma opção através deste modelo é necessário determinar o valor de σ(B,t), o que é feito por intermédio da aplicação da equação

$$\sigma(B,t)=k\cdot B^{\alpha-1}\cdot D(B,t).$$

Ora, para tal é imprescindível estimar os parâmetros "k" e "α", o que pode ser feito através da seguinte regressão:

$$\ln\sigma=\ln k+(\alpha-1)\cdot\ln B+\ln D+\varepsilon$$

Em suma, este modelo envolve um grau de complexidade superior ao do modelo de Black-Scholes, mas fornece resultados mais verosímeis particularmente quando se tratam de opções cujo tempo em falta para a maturidade constitui uma parcela significativa do tempo de vida da obrigação subjacente (pois, nestes casos o pressuposto de invariabilidade de "σ^2" é menos realista). **Pelo contrário, face a opções com um reduzido tempo em falta para a maturidade e sobre obrigações com um longo tempo de vida, o modelo de Black-Scholes constitui uma boa base de aproximação do valor de tais contratos.**[336]

3.3.5.4. Fórmulas de avaliação do modelo de Schaefer e Schwartz

Infelizmente, o modelo de Schaefer e Schwartz não possui uma solução analítica fechada. No entanto, ele poderá ser facilmente resolvido mediante a utilização de um método numérico, nomeadamente o método das diferenças finitas[337].

Para o efeito, considere-se:

$B_i = i \cdot h$ com, $i = 0,\ldots,n$

e em que,

$B_0 = 0$;

$B_n \equiv$ cotação da obrigação subjacente acima da qual V_B tende para zero, no caso de uma opção de venda, ou para a unidade, tratando-se de uma opção de compra; e

$h = (B_n - B_0)/n = B_n/n$

$t_j = j \cdot l$ com, $j = 0,\ldots,m$

e em que,

$t_0 \equiv$ data de avaliação;

$t_m \equiv$ T $\equiv$ data de vencimento da opção; e

$l = (t_m - t_0)/m$

e

$V(B,t) = V(B_i,t_j) = V_{i,j}$

[336]Mais ainda, os autores constataram também que as diferenças entre os modelos de Black-Scholes e de Schaefer-Schwartz ao nível do parâmetro delta ($\partial V / \partial B$) são bastante menos importantes do que as diferenças registadas sobre o valor da opção.

[337]Vide ponto 3.2.2.3.

3.3.5.4.1. Aproximação explícita às diferenças finitas

Assim sendo, efectuando na equação diferencial fundamental

$$\frac{1}{2}\cdot B^2\cdot\sigma^2(B,t)\cdot V_{BB}+(r\cdot B-J)\cdot V_t-r\cdot V=0$$

as substituições

$V_B=\left(V_{i+1,j}-V_{i-1,j}\right)/2h$[338];

$V_{BB}=\left(V_{i+1,j}-2\cdot V_{i,j}+V_{i-1,j}\right)/h^2$;

$V_t=\left(V_{i,j}-V_{i,j-1}\right)/l$;

$B=i\cdot h$; e

$\sigma^2(B,t)=k\cdot(i\cdot h)^{\alpha-1}\cdot D_{i,j}$ com,

$$D_{i,j}=\frac{\sum_{t>t_j}t\cdot CF_t\cdot e^{-t\cdot y_{i,j}}}{i\cdot h} \quad \text{e} \quad y_{i,j}\text{: } \sum_{t>t_j}CF_t\cdot e^{-t\cdot y_{i,j}}=i\cdot h$$

obtém-se um conjunto de sistemas de equações às diferenças, o qual constitui uma aproximação explícita à anterior equação diferencial:

$$\frac{1}{2}\cdot(i\cdot h)^2\cdot k\cdot(i\cdot h)^{\alpha-1}\cdot D_{i,j}\cdot\frac{V_{i+1,j}-2\cdot V_{i,j}+V_{i-1,j}}{h^2}+\left(r\cdot i\cdot h-J_j\right)\cdot\frac{V_{i+1,j}-V_{i-1,j}}{2h}+\frac{V_{i,j}-V_{i,j-1}}{l}-r\cdot V_{i,j}=0$$ [339]

$$\Updownarrow$$

---

[338] Média aritmética simples entre uma diferença finita "backward" e uma diferença finita "forward", isto é,

$$V_B=\frac{\left(V_{i,j}-V_{i-1,j}\right)/h+\left(V_{i+1,j}-V_{i,j}\right)/h}{2}.$$

[339] J_j representa o cupão gerado pela obrigação subjacente no período "t_j".

$$V_{i,j-1} = a_{i,j} \cdot V_{i-1,j} + b_{i,j} \cdot V_{i,j} + c_{i,j} \cdot V_{i+1,j} \qquad (255)$$

$$i = 1,\dots,n-1$$
$$j = 1,\dots,m$$

sendo,

$$a_{i,j} = \frac{k \cdot l \cdot i^{\alpha+1} \cdot h^{\alpha} \cdot D_{i,j} - r \cdot i \cdot h \cdot l + J_j \cdot l}{2h}$$

$$b_{i,j} = 1 - r \cdot l - k \cdot l \cdot i^{\alpha+1} \cdot h^{\alpha-1} \cdot D_{i,j}$$

$$c_{i,j} = \frac{k \cdot l \cdot i^{\alpha+1} \cdot h^{\alpha} \cdot D_{i,j} + r \cdot i \cdot h \cdot l - J_j \cdot l}{2h}$$

e em que,

$$D_{i,j} = \frac{\sum_{t>t_j} t \cdot CF_t \cdot e^{-t \cdot y_{i,j}}}{i \cdot h} \quad \text{e} \quad y_{i,j}\text{:} \ \sum_{t>t_j} CF_t \cdot e^{-t \cdot y_{i,j}} = i \cdot h$$

3.3.5.4.2. Aproximação implícita às diferenças finitas

Em alternativa, se na equação diferencial fundamental

$$\frac{1}{2} \cdot B^2 \cdot \sigma^2(B,t) \cdot V_{BB} + (r \cdot B - J) \cdot V_t - r \cdot V = 0$$

forem efectuadas as substituições

$$V_B = \left(V_{i+1,j} - V_{i-1,j}\right) / 2h;$$

$$V_{BB} = \left(V_{i+1,j} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i-1,j}\right) / h^2;$$

$$V_t = \left(V_{i,j+1} - V_{i,j}\right) / l$$[340];

[340] Única alteração relativamente ao método anterior.

$B = i \cdot h$; e

$\sigma^2(B,t) = k \cdot (i \cdot h)^{\alpha-1} \cdot D_{i,j}$ com,

$$D_{i,j} = \frac{\sum_{t>t_j} t \cdot CF_t \cdot e^{-t \cdot y_{i,j}}}{i \cdot h} \quad \text{e} \quad y_{i,j}: \sum_{t>t_j} CF_t \cdot e^{-t \cdot y_{i,j}} = i \cdot h$$

obtém-se um conjunto de sistemas de equações às diferenças, o qual constitui uma aproximação implícita à anterior equação diferencial:

$$\frac{1}{2} \cdot (i \cdot h)^2 \cdot k \cdot (i \cdot h)^{\alpha-1} \cdot D_{i,j} \cdot \frac{V_{i+1,j} - 2 \cdot V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} + (r \cdot i \cdot h - J_j) \cdot \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2h} + \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{l} - r \cdot V_{i,j} = 0$$

$$\Updownarrow$$

APROXIMAÇÃO IMPLÍCITA ÀS DIFERENÇAS FINITAS DO VALOR DE UMA OPÇÃO SOBRE OBRIGAÇÕES DE DÍVIDA PÚBLICA

$$\boldsymbol{d_{i,j} \cdot V_{i-1,j} + e_{i,j} \cdot V_{i,j} + f_{i,j} \cdot V_{i+1,j} = V_{i,j+1}} \qquad (256)$$

$$\boldsymbol{i = 1, \ldots, n-1}$$
$$\boldsymbol{j = 0, \ldots, m-1}$$

sendo,

$$\boldsymbol{d_{i,j} = \frac{-k \cdot l \cdot i^{\alpha+1} \cdot h^{\alpha} \cdot D_{i,j} + r \cdot i \cdot h \cdot l - J_j \cdot l}{2h}}$$

$$\boldsymbol{e_{i,j} = 1 + r \cdot l + k \cdot l \cdot i^{\alpha+1} \cdot h^{\alpha-1} \cdot D_{i,j}}$$

$$\boldsymbol{f_{i,j} = \frac{-k \cdot l \cdot i^{\alpha+1} \cdot h^{\alpha} \cdot D_{i,j} - r \cdot i \cdot h \cdot l + J_j \cdot l}{2h}}$$

e em que,

$$\boldsymbol{D_{i,j} = \frac{\sum_{t>t_j} t \cdot CF_t \cdot e^{-t \cdot y_{i,j}}}{i \cdot h} \quad \text{e} \quad y_{i,j}: \sum_{t>t_j} CF_t \cdot e^{-t \cdot y_{i,j}} = i \cdot h}$$

3.3.5.4.3. Metodologia de resolução das equações (255) e (256)

Conforme já foi referido, a escolha entre uma aproximação explícita ou implícita não é irrelevante em termos de operacionalidade e de rigor, pois enquanto a primeira não assegura a convergência da solução numérica para a solução da equação diferencial, já a segunda envolve a resolução simultânea de um conjunto de equações lineares.

De qualquer modo, em ambos os casos **o problema de determinação do valor de uma opção sobre obrigações de dívida pública é inicializado na data de vencimento da opção** (isto é, para j = m), uma vez que o conjunto de valores $V_{i,m}$ $(i = 0,\ldots,n)$ é conhecido:

- opções de compra ("europeias" ou "americanas")

$$V_{i,m} = \begin{cases} i \cdot h - X \Leftarrow i \geq X/h \\ 0 \Leftarrow i < X/h \end{cases} \quad \mathbf{i = 0, \ldots, n} \qquad (257)$$

- opções de venda ("europeias" ou "americanas")

$$V_{i,m} = \begin{cases} X - i \cdot h \Leftarrow i \leq X/h \\ 0 \Leftarrow i > X/h \end{cases} \quad \mathbf{i = 0, \ldots, n} \qquad (258)$$

Posto isto, a resolução do problema prossegue iterativamente e por ordem cronológica inversa (ou seja, aumentando o tempo em falta para o vencimento da opção), **mediante a utilização, para valores de "j" sucessivamente menores, da equação** (255) -aproximação explícita- **ou** (256) -aproximação implícita- **e das expressões**

$$V_{0,j} = 0^{341} \quad \mathbf{para\ \ j = 0, \ldots, m} \qquad (259)$$

$$V_{n,j} - V_{n-1,j} = h^{342} \quad \mathbf{para\ \ j = 0, \ldots, m} \qquad (260)$$

[341] Pois, V = 0 para B = 0, no caso de uma call.

no caso das opções de compra ("europeias" ou "americanas"), ou das fórmulas

$$V_{0,j} = X^{343} \quad \text{para } j = 0, ..., m \qquad (261)$$

sendo. X ≡ preço de exercício da put

$$V_{n,j} - V_{n-1,j} = 0^{344} \quad \text{para } j = 0, ..., m \qquad (262)$$

tratando-se de opções de venda ("europeias" ou "americanas").

Repare-se que, ao contrário do que sucedeu aquando da aplicação do método das diferenças finitas às opções sobre futuros, os parâmetros das equações às diferenças ($a_{i,j}$, $b_{i,j}$ e $c_{i,j}$ ou $d_{i,j}$, $e_{i,j}$ e $f_{i,j}$) variam agora não só com a cotação da obrigação subjacente mas também com o tempo[345], pelo que terão de ser previamente calculados para cada um dos pontos do espaço (i,j). Ou seja, a aplicação deste método à avaliação de opções sobre obrigações, no contexto do modelo de Schaefer e Schwartz, é bastante mais complexa.

Tratando-se de opções de tipo "americano", em cada etapa do processo iterativo de resolução, é ainda necessário impor a observância das seguintes condições de exercício antecipado:

- aproximação explícita

- opções de compra "americanas"

$$V_{i,j-1} = \max\left[\left(a_{i,j} \cdot V_{i-1,j} + b_{i,j} \cdot V_{i,j} + c_{i,j} \cdot V_{i+1,j}\right), i \cdot h - X\right] \quad i = 1,\dots,n-1;\ j = 1,\dots,m \qquad (263)$$

---

[342] Uma vez que, $\lim_{B \to +\infty} V_B(B,t) \cong \left(V_{n,j} - V_{n-1,j}\right)/h = 1$, onde V representa o valor de uma call.

[343] Pois, V = X para B = 0, tratando-se de uma opção de venda.

[344] Dado que, $\lim_{B \to +\infty} V_B(B,t) \cong \left(V_{n,j} - V_{n-1,j}\right)/h = 0$, onde V representa o valor de uma put.

[345] Visto que a "duration" de uma obrigação varia ao longo do tempo.

- opções de venda "americanas"

$$V_{i,j-1} = \max\left[\left(a_{i,j} \cdot V_{i-1,j} + b_{i,j} \cdot V_{i,j} + c_{i,j} \cdot V_{i+1,j}\right), X - i \cdot h\right] \qquad i = 1,\ldots,n-1 \quad j = 1,\ldots,m \tag{264}$$

- aproximação implícita

- opções de compra "americanas"

$$V_{i,j} = \max\left[\left(V_{i,j+1} - d_{i,j} \cdot V_{i-1,j} - f_{i,j} \cdot V_{i+1,j}\right)/e_{i,j}, i \cdot h - X\right] \qquad i = 1,\ldots,n-1 \quad j = 0,\ldots,m-1 \tag{265}$$

- opções de venda "americanas"

$$V_{i,j} = \max\left[\left(V_{i,j+1} - d_{i,j} \cdot V_{i-1,j} - f_{i,j} \cdot V_{i+1,j}\right)/e_{i,j}, X - i \cdot h\right] \qquad i = 1,\ldots,n-1 \quad j = 0,\ldots,m-1 \tag{266}$$

O processo de resolução só termina depois de calculados os valores $V_{1,0}, V_{2,0}, \ldots, V_{n-1,0}$, sendo que o preço procurado para a opção corresponderá ao valor $V_{i,0}$, tal que i.h ≡ cotação actual da obrigação subjacente.

3.3.6. Conclusões

Os diferentes modelos de avaliação de opções financeiras "on the spot" sobre obrigações de dívida pública apresentados diferem, na sua essência, ao nível dos pressupostos assumidos. Contudo, a escolha do melhor modelo de avaliação deve ser feita tendo em conta, preferencialmente, a sua qualidade de ajustamento e não tanto em função da verosimilhança dos pressupostos adoptados.

Infelizmente, no caso português a inexistência de um mercado de opções sobre títulos de dívida pública impõe a postecipação da realização de testes empíricos conducentes à determinação dos modelos de avaliação mais adequados para cada tipo de opção. Consequentemente, por agora apenas é possível confrontar os diversos modelos de avaliação atendendo à sua consistência teórica e à operacionalidade subjacente à sua utilização prática (a qual será tanto maior quanto menor o número de parâmetros que seja necessário estimar e caso o modelo possua uma fórmula analítica "fechada"), de onde se conclui que:

i) **A avaliação de opções "europeias"[346] sobre obrigações de cupão zero de dívida pública[347] poderá ser facilmente efectuada através do modelo de Ball e Torous**, pois tal modelo encerra uma fórmula analítica "fechada", envolve somente a estimação de um parâmetro (tal como o modelo de Black-Scholes) e, ao contrário do modelo de Black-Scholes, não pressupõe a existência de uma estrutura temporal de taxas de juro "flat";

ii) **A avaliação de opções "europeias" com um reduzido tempo em falta para a maturidade e sobre títulos de dívida pública "com cupões" de elevado tempo em falta para o vencimento poderá ser feita mediante o recurso ao modelo de Black-Scholes**, uma vez que será possível utilizar fórmulas analíticas fechadas contornando os pressupostos de inalterabilidade das taxas de juro (opção com uma vida curta) e da volatilidade do preço da obrigação subjacente (obrigação com uma vida longa);

iii) **Em todos os restantes casos, nomeadamente ao nível da avaliação de opções "americanas" sobre obrigações de dívida pública, a solução poderá consistir na utilização do modelo de Black, Derman e Toy.** Isto porque, não havendo nenhum modelo que forneça fórmulas analíticas "fechadas" para os casos em estudo, então faz sentido recorrer ao modelo que envolva um menor número de parâmetros a estimar e que possua uma maior consistência teórica. Em termos do número de parâmetros a estimar, o modelo de Black, Derman e Toy supera qualquer outro modelo derivado das teorias da estrutura temporal de taxas de juro bem como o modelo de Schaefer e Schwartz. Sob o ponto de vista teórico, constata-se que o modelo sugerido, por exemplo ao contrário dos modelo de Ho e Lee ou de Rendleman e Bartter, considera a variação da volatilidade das

[346] Bem como de opções de compra "americanas".

[347] Ou sobre títulos de dívida pública cujo próximo cash flow vincendo ocorra somente após o vencimento da opção.

taxas de juro ao longo do tempo, e, ao invés do que sucede com o modelo de Schaefer e Schwartz, não pressupõe a inalterabilidade das taxas de juro.

Para terminar, nunca é demais realçar que as ilações anteriormente expostas revelam um caracter meramente provisório, já que carecem de verificação empírica.

BIBLIOGRAFIA

Ball, C. A., e W. N. Torous, "Bond Price Dynamics and Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 18, nº 4, Dezembro, 1983, pp. 517-31.

Barone-Adesi, G., e R. E. Whaley, "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *The Journal of Finance*, vol. XLII, nº 2, Junho, 1987, pp. 301-20.

Black, F., e M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, Maio/Junho, 1973, pp. 637-54.

Black, F., "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, 3, 1976, pp. 167-79.

Black, F., E. Derman e W. Toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, Janeiro/Fevereiro, 1990, pp. 33-9.

Boyle, P. P., "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4, 1977, pp. 323-38.

Brennan, M. J., e E. S. Schwartz, "Saving Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds", *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp. 67-88.

Brennan, M. J., e E. S. Schwartz, "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Setembro, 1978, pp. 461-74.

Brenner, M., *Option Pricing*, Lexington Books, 1983.

Brenner, M., G. Courtadon, e M. Subrahmanyam, "Options on the Spot and Options on Futures", *The Journal of Finance*, vol. XL, nº 5, Dezembro, 1985, pp. 1303-17.

Courtadon, G., "The Pricing of Options on Default-Free Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. XVII, nº 1, Março, 1982, pp. 75-100.

Cox, J. C., e S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics*, 3, 1976, pp. 145-66.

Cox, J. C., S. A. Ross, e M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, 1979, pp. 229-63.

Cox, J. C., e M. Rubinstein, *Options Markets*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, e S. A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, vol. 53, nº 2, Março, 1985, pp. 385-407.

Drezner, Z., "Computation of the Bivariate Normal Integral", *Mathematics of Computation*, vol. 32, nº 141, Janeiro, 1978, pp. 277-279.

Dubofsky, D. A., *Options and Financial Futures: valuation and uses*, McGraw-Hill International Editions, Economics Series, 1992.

Fitzgerald, M. D., *Financial Futures*, Euromoney Publications, 1983.

Fitzgerald, M. D., *Financial Options*, Euromoney Publications, 1987.

Geske, R., "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Novembro, 1977, pp. 541-52.

Geske, R., "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics*, 7, 1979, pp. 63-81.

Geske, R., "A Note on an Analytical Valuation Formula For Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 7, 1979, pp. 375-80.

Geske, R., "Comments on Whaley's Note", *Journal of Financial Economics*, 9, 1981, pp. 213-5.

Geske, R., e H. E. Johnson, "The American Put Option Valued Analytically", *The Journal of Finance*, vol. XXXIX, nº 5, Dezembro, 1984, pp. 1511-24.

Geske, R., e K. Shastri, "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 20, nº 1, Março, 1985, pp. 45-71.

Gomes Mota, A. S., e J. H. Correia Tomé, *Mercado de Títulos - Uma Abordagem Integrada*, Texto Editora, 1991.

Ho, T. S. Y., e S. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *The Journal of Finance*, vol. XLI, nº 5, Dezembro, 1986, pp. 1011-29.

Hull, J., *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Prentice-Hall International Editions, 1989.

Hull, J., e A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 25, nº 1, Março, 1990, pp. 87-100.

Hull, J., e A. White, "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", *The Review of Financial Studies*, vol. 3, nº 4, 1990, pp. 573-92.

Jamshidian, F., "An Exact Bond Option Formula", *The Journal of Finance*, vol. XLIV, n° 1, Março, 1989, pp. 205-209.

Jarrow, R. A., e A. Rudd, *Option Pricing*, Dow Jones-Irwin, 1983.

Merton, R. C., "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973, pp. 141-83.

Milton, R. C., "Computer Evaluation of the Multivariate Normal Integral", *Technometrics*, vol.14, n° 4, Novembro, 1972, pp. 881-9.

Overdahl, J. A:, "The Early Exercice of Options on Treasury Bond Futures", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 23, n° 4, Dezembro, 1988, pp. 437-49.

Parkinson, M., "Option Pricing: The American Put", *The Journal of Business*, vol. 50, Janeiro, 1977, pp. 21-36.

Ramaswamy, K., e S. M. Sundaresan, "The Valuation of Options on Futures Contracts", *The Journal of Finance*, vol. XL, n° 5, Dezembro, 1985, pp. 1319-40.

Rendleman, R. J., e B. J. Bartter, "Two-State Option Pricing", *The Journal of Finance*, vol. XXXIV, n° 5, Dezembro, 1979, pp. 1093-110.

Rendleman, R. J., e B. J. Bartter, "The Pricing of Options on Debt Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. XV, n° 1, Março, 1980, pp. 11- 24.

Roll, R., "An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp. 251-8.

Schaefer, S. M., e E. S. Schwartz, "Time-Dependent Variance and the Pricing of Bond Options", *The Journal of Finance*, vol. XLII, n° 5, Dezembro, 1987, pp. 1113-28.

Schwartz, E. S., "The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach", *Journal of Financial Economics*, 4, 1977, pp. 79-93.

Schwarz, E. W., J. M. Hill, e T. Schneeweis, *Financial Futures: Fundamentals, Strategies, and Applications*, Dow Jones-Irwin, 1986.

Vasicek, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp. 177-88.

Whaley, R. E., "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, 9, 1981, pp. 207-11.

Whaley, R. E., "Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks", *Journal of Financial Economics*, 10, 1982, pp. 29-58.

Whaley, R. E., "Valuation of American Futures Options: Theory and Empirical Tests", *The Journal of Finance*, vol. XLI, n° 1, Março, 1986, pp. 127-50.

Whaley, R. E., "On Valuing American Futures Options", *Financial Analysts Journal*, Maio/Junho, 1986, pp. 49-59.